Der Anfangsgründe aller Mathematischen Wissenschaften

Sechster und letzter Theil,

Welcher sowohl die gemeine

Algebra, als die Differential- und Integralrechnung, und einen Anhang

von den vornehmsten

Mathematischen Schriften,

in sich begreift,

und zu mehrerem Aufnehmen der Mathematik so wohl auf hohen als niederen Schulen aufgesetzt worden

von

Christian Freyherrn von Wolf,

Seiner Königl. Majestät in Preussen geheimen Rathe und Kanzler der Universität Halle, wie auch Professore Juris Naturæ & Gentium ac Matheseos daselbst, Professore honorario zu St. Petersburg, der königl. Academie der Wissenschaften zu Paris, wie auch der königl. großbritannischen und der königl. preußl. Societät der Wissenschaften Mitgliede.

Neue, verbesserte und vermehrte Auflage.

WIEN,

gedruckt bey Johann Thomas Trattnern, kaiserl. königl. Hof- und N. Oe. Landschafts-Buchdruckern und Buchhändlern.

1763.

Der Anfangs-Gründe

aller

Mathematischen Wissenschaften

Sechster und letzter Theil,

welcher sowohl die gemeine

Algebra, als die Differential- und Integralrechnung, und einen

Auszug

aus den vornehmsten

Mathematischen Schriften,

in sich enthält,

und zu mehrerem Wachsthum der Mathematik
[illegible]
worden

von

Christian Freyherrn von Wolf,

Seiner Königl. Majestät in Preussen geheimen Rathe und
[illegible]

Neue, verbesserte und vermehrte Auflage.

Wien,

gedruckt bey Johann Thomas Trattner,
[illegible]

Anfangsgründe

sowohl der gemeinen

Algebra,

als der

Differential-

und

Integralrechnung.

Vorrede.

Geehrter Leser!

Die Algebra kann niemals zu viel gerühmt werden: denn sie ist eine Kunst, durch welche man mathematische Wahrheiten von sich selbst erfinden kann. Wenn ihr demnach die Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften, welche ich in den fünf vorhergehenden Theilen erkläret habe, euch bekannt machet, und die Algebra dabey studiret; so werdet ihr aus jenen durch diese für euch selbst finden können, was ihr sonst aus Büchern oder von andern zu lernen vonnöthen hättet. Ja ihr werdet auch vieles erfinden können, was andere vor euch noch nicht gedacht haben. Mit einem Worte, sie macht euch geschickt, daß, wenn ihr nur ganz was geringes aus den mathe-

matischen Wissenschaften gelernet habt, ihr von euch selbst ein mehreres erfinden könnet, zu der Zeit, wenn ihr es vonnöthen habt. Es ist aber keine vollkommenere Art zu studiren, als wenn man nur weniges lernen darf, und sich dabey auf alle vorkommende Fälle geschickt macht. Ich sage aber noch mehr. Ihr treffet in der Algebra die allervollkommenste Manier zu raisonniren an. Denn sie stellet die Begriffe der Sachen durch Zeichen vor, und verwandelt die Schlüsse, welche mit vielem Bedachte aus ihnen hergeleitet werden, in eine leichte Manier, die Zeichen mit einander zu verknüpfen und von einander zu trennen. Dadurch erhält man öfters in einer Zeile mehr, als in großen Büchern nicht Raum finden würde. Durch das Anschauen weniger Zeichen werdet ihr öfters verständiger, als ihr durch vieler Jahre Arbeit nach der gemeinen Art zu lernen und zu denken nicht werden könnet. In dieser Absicht pflegt man die Algebra den Gipfel menschlicher Wissenschaften zu nennen. Ich habe demnach sowohl die gemeine Algebra, als die unvergleichliche Differential- und Integralrechnung des Herrn von Leibnitz dergestalt erklären wollen, daß nicht allein ihre Kunstgriffe unvermerkt beygebracht, sondern auch die Hauptlehren von der so genannten Mathesi pura zugleich mit erlernet, ja von selbst gefunden werden können.

Anfangsgründe der Algebra.

Der erste Theil, von den Anfangsgründen der gemeinen Algebra.

Die 1. Erklärung.

1.

Die gemeine Algebra ist eine Wissenschaft, aus einigen gegebenen endlichen Größen, andere ihres gleichen, von welchen, in Ansehung der gegebenen etwas bekannt gemacht wird, vermittelst gewisser Gleichungen zu finden.

Die 1. Anmerkung.

2. Z. E. Ihr sollt zwo Zahlen finden, welche mit einander multipliciret, eine gegebene Zahl 60, hingegen zusammen addiret, eine andere gegebene Zahl 16 bringen. Also werden euch gegeben zwo Zahlen, und ihr sollet aus denselben zwo andere Zahlen finden, von welchen euch bekannt gemacht wird, daß ihre Summe der kleinern, ihr Product aber der größern von den gegebenen Zahlen gleich seyn soll. Die Algebra nun lehret euch nicht allein in gegenwärtigem Falle die verlangten Zahlen, sondern auch eine allgemeine Regel finden, nach welcher ihr alle Exempel von dieser Art rechnen könnet.

Zusatz.

3. Also ist die Algebra eine allgemeine Rechenkunst, durch welche man nämlich alles,

was sich rechnen läßt, ausrechnen kann (§. 1. *Arithm.*).

Die 2. Anmerkung.

4. Daher nennet auch der große Mathematicus in Engelland, Herr Isaac Newton, seine Anweisung zur Algebra Arithmeticam Universalem, und wir können die Algebra in unserer deutschen Sprache mit gutem Fuge eine Allrechenkunst heissen, zumal, wenn man die Buchstabenrechenkunst mit dazu nimmt.

Die 2. Erklärung.

5. Die Buchstabenrechenkunst wird diejenige genennet, welche anstatt der Ziffern, allgemeine Zeichen der Größen braucht, und damit die gewöhnlichen Rechnungsarten verrichtet.

Die 3. Erklärung.

6. Eine Größe nennen wir alles dasjenige, was sich vermehren oder vermindern läßt, in so weit es sich vermehren oder vermindern läßt.

Der 1. Zusatz.

7. Also bestehet das Wesen einer Größe in der Verhältniß zu einer andern ihres gleichen (§. 65. *Arithm.*).

Die 1. Anmerkung.

8. Z. E. Die Wärme nenne ich in so weit eine Größe, als ich denken kann, wie vielmal eine gegebene Wärme, als die Wärme der Luft des heutigen Tages, in einer andern gegebenen Wärme, als in der Wärme des gestrigen Tages enthalten sey.

Der 2. Zusatz.

9. Und folglich sind die Größen undeterminirte Zahlen, da man nämlich noch kein gewisses Eins setzet (§. 5. 8. *Arithm.*).

Die 2 Anmerkung.

10. Nehmet z. E. eine gerade Linie von einer determinirten Länge. Setzet, die Linie sey eingetheilet in 4 gleiche Theile. Wenn ihr einen von denselben zum Eins machet, und die Länge der ganzen Linie mit ihm vergleichet: so heißt die Linie 4, und ihr betrachtet die Länge als eine Zahl. Setzet abermals, die Linie sey eingetheilet in 5 gleiche Theile. Wenn ihr einen davon zum Eins machet, und die Länge der ganzen Linie mit ihr vergleichet; so heißt die Linie 5, und ihr betrachtet ihre Länge abermals als eine Zahl. Wiederum setzet, die Linie sey eingetheilet in 13 gleiche Theile, und vergleichet ihre ganze Länge mit einem solchen Theile, so heißt sie 13, und ihr betrachtet dieselbe als eine Zahl. Hieraus sehet ihr, daß die Länge einer Linie durch unzählich viel Zahlen große und kleine ausgesprochen werden kann, nachdem ihr nämlich einen großen oder kleinen Theil derselben zum Eins annehmet. Wenn ihr nun keinen gewissen Theil setzet, mit welchen sie verglichen werden soll, sondern sie nur überhaupt betrachtet, in so weit sie mit einem gewissen Eins kann verglichen werden: so stellet ihr euch dieselbe als eine Größe vor. Und daher kommt es, daß durch die Buchstabenrechenkunst sehr allgemeine Wahrheiten erfunden werden: da hingegen die Rechenkunst nur einzelne Exempel ausrechnet, und also stäts mit einzelnen Fällen zu thun hat.

Der 3. Zusatz.

11. Alles, was wir in der Welt antreffen und in uns selbst finden, hat in allem dem, was es wirklich ist, und wovon sich etwas gedenken läßt, seine Schranken und läßt sich dannenhero mit andern Dingen von seiner Art vergleichen, und darum als etwas, welches vermehret oder vermindert werden kann, das ist, als eine Größe (§. 6. 7.) betrachten. Derowegen erstreckt sich die Buchstabenrechenkuust und Algebra auf alle endlichen Dinge, und führet uns auf einen deutlichen Begriff von ihrer Endlichkeit.

Die 3. Anmerkung.

12. Es kann keine vollkommenere Erkänntniß gedacht, noch verlanget werden, als wenn man von der Endlichkeit der Dinge einen deutlichen Begriff erlanget hat: welches ich bey anderer Gelegenheit klar und deutlich ausführen will. Daher dienet die Algebra zu einer vollkommenen Erkänntniß der Dinge zu gelangen, und ohne sie würde es in den meisten Fällen unmöglich gewesen seyn, selbige zu überkommen.

Der 4. Zusatz.

13. Weil die Größen undeterminirte Zahlen sind (§. 9.); so kann man auch keine andere Veränderungen, als wie mit Zahlen, mit ihnen vornehmen, und daher sie entweder zusammen addiren, oder von einander subtrahiren, oder in einander multipliciren, oder durch einander dividiren (§. 13 15. 18. 21. 24. *Arithm.*).

Die 4. Anmerkung.

14. Gleichwie ihr aber mit Zahlen keine Rechnung vornehmen könnet, ihr müsset euch vorher dieselben durch gewisse Zeichen vorstellen: eben so wird in der Algebra erfordert, daß ihr für die Größen gewisse Zeichen ersinnet.

Der 1. willkührliche Satz.

15. Man benenne die gegebenen Größen jederzeit mit den ersten Buchstaben des Alphabets, *a*, *b*, *c*, *d* u. s. w. die unbekannten aber, welche man sucht, mit den letzten, *x*, *y*, *z*.

Die 1. Anmerkung.

16. Wie sich die Größen dem Verstande zu erkennen geben, so müssen sie auch durch die Zeichen von einander unterschieden werden. Nun stellen sie sich in den algebraischen Aufgaben jederzeit dem Verstande vor, entweder als gegebene, das ist, bekannt gemachte, oder als gesuchte, das ist, noch unbekannte Größen: Derowegen muß man auch durch die Zeichen unserer Einbildungskraft diesen Un-

terscheid klärlich vorstellen. Denn sonst wäre Gefahr, daß man das Unbekannte mit dem Bekannten verwechselte, und daher in Irrthum verfiele.

Die 2. Anmerkung.

17. Es wäre bey der Benennung der Größen noch gar viel zu erinnern. Denn, wenn sie geschickt und zu dem Erfinden dienlich seyn soll, so müssen die Zeichen alle gegebenen relationes der bedeuteten Dinge gegen einander andeuten. Z. E. Wenn eine von den unbekannten Größen dreymal so groß ist als die andere, und die kleinere heißt x; so nennet man die größere lieber $3x$ als y. Allein, ich würde den Anfängern nicht dienen, wenn ich sie mit vielen Regeln auf einmal überhäufte. Und halte es dannenhero für rathsamer, daß ich es inskünftige lieber durch Exempel lehre, und die Regeln nach und nach gleichsam unvermerkt und ohne Mühe beybringe.

Der 2. willkührliche Satz.

18. Das Zeichen der Addition ist $+$, der Subtraction aber $-$. Jenes wird durch Mehr; dieses durch Weniger ausgesprochen.

Anmerkung.

19. Z. E. Die Summe zwoer Größen a und b wird geschrieben $a+b$, und ausgesprochen: a mehr b. Hingegen die Differenz zwoer Größen wird geschrieben durch $a-b$, und ausgesprochen: a weniger b. Als: es bedeute a 7 Thaler, b 8 Groschen; so bedeutet $a+b$ 7 Thl. + 8 gl. das ist. 7 Thl. und 8 gl. hingegen $a-b$ 7 Thl. — 8 gl. das ist, 7 Thl. weniger 8 gl.

Der 3. willkührliche Satz.

20. Die Multiplication hat entweder gar kein Zeichen, sondern man setzt die Buchstaben, welche einander multipliciren, ohne einiges Zeichen neben einander: oder man deutet sie durch ein Comma (,) oder einen Punct (.) an. Insgemein braucht man dieses Zeichen $\times$.

Anmer-

Anmerkung.

21. Wenn a durch b multipliciret werden soll, so schreibet das Product ab, oder a, b oder a. b, oder a × b. Wir werden uns des letzten Zeichens niemals bedienen, weil es leicht mit dem X verwechselt wird. Doch haben wir es hiermit anführen wollen, weil es in allen Büchern häufig vorkommt. Am meisten werden wir kein Zeichen brauchen: das Comma und den Punct aber nur in gewissen Fällen aus besondern Ursachen, welche sich zu seiner Zeit in den Exempeln zeigen werden.

Der 4. willkührliche Satz.

22. Wenn eine Größe viele andere auf einmal multiplicirt, so schließt man sie in eine parenthesin ( ) ein, und setzt jene ohne einiges Zeichen vor oder hinter die parenthesin: oder man setzt zwischen dieselben ein bloßes Comma.

Anmerkung.

23. Das Product von $a + b - c$ in d schreibet entweder also: $(a + b - c)\, d$, oder dergestalt: $d\, (a + b - c)$, oder auch folgender maßen: $a + b - c,\ d$. Insgemein schreibt man dieses Product also: $\overline{a + b - c} \times d$, oder auch $d \times \overline{a + b - c}$. Allein, wir bleiben billig bey der Manier des Herrn von Leibnitz, welche mit großem Vortheile in die Acta Eruditorum Lipsiensia eingeführet worden ist: denn, man kann sich nicht so leicht verirren, wie bey dem gemeinen Zeichen, und macht auch den Buchdruckern nicht so viel unnöthige Mühe, ersparet über dieses viel an dem Raume. Anderer Vortheile wollen wir jetzt nicht gedenken, welche sich im Folgenden zeigen werden.

Der 5. willkührliche Satz.

24. Das Zeichen der Division sind zween Puncte (:), oder man schreibt die Buchstaben, welche einander dividiren sollen, wie in der Rechenkunst einen Bruch.

Anmerkung.

25. Wenn a durch b dividiret werden soll, so schreibe man den Quotienten entweder $a:b$, oder $\frac{a}{b}$ und spreche es beyderseits aus: a durch b dividirt.

Der 6. willkührliche Satz.

26. Wenn eine Größe viele andere auf einmal dividiret, oder viele andere eine dividiren, so werden, wie in der Multiplication, die vielen in eine parenthesin ( ) eingeschlossen, oder man kann auch an deren statt ein Comma brauchen.

Anmerkung.

27. Wenn $a+b$ durch c dividirt werden soll, so schreibet den Quotienten entweder $(a+b):c$, oder $a+b,:c$. Sollet ihr a durch $b+c$ dividiren, so ist der Quotient $a:(b+c)$ oder $a,:b+c$. Wiederum, wenn ihr $a+b$ durch $c+d$ dividiret, so schreibet den Quotienten $(a+b):(c+d)$ oder $a+b,:,c+d$. Nach der gemeinen Art schreibet ihr diese Quotienten $\frac{a+b,}{c}$ $\frac{a,}{b+c}$ $\frac{a+b,}{c+d}$ oder auch

$$\overline{a+b:,c,} \quad \overline{a:b+c,} \quad \overline{a+b} : \overline{c+d.}$$

Die 1. Aufgabe.

28. Einerley Größen mit einerley und verschiedenen Zeichen zusammen zu addiren.

Auflösung.

1. Wenn sie einerley Zeichen haben, so zählet sie, wie in der Rechenkunst zusammen.
2. Sind aber die Zeichen verschieden, so ziehet von der größern die kleinere ab, und setzet zu dem, was überbleibt, das Zeichen der größern.

Exempel.

Exempel.

$$\begin{array}{r} a+2b-3c-5d \\ 3a-2b+6c+2d \\ \hline 4a \quad +3c-3d \end{array}$$

Beweis.

Weil die Buchstaben undeterminirte Zahlen sind (§. 9. 15.); so könnet ihr einen jeden als Eins ansehen, und demnach die Größen, welche durch einerley Buchstaben benennet werden, als Dinge von gleicher Art, zusammen zählen (§. 8. *Arithm.*). Alle Größen, welche mit dem Zeichen — bemerkt werden, fehlen, und hingegen die, welche das Zeichen + haben, sind vorhanden. Wenn ich derowegen von beyder Art addiren soll, so wird durch die letztern der Mangel aufgehoben, und muß freylich die Addition in eine Subtraction verkehret werden. W. Z. E.

Die 1. Anmerkung.

29. Die Größen, welche mit dem Zeichen — bemerket werden, hat man nicht anderst, als Schulden anzusehen, und hingegen die andern mit dem Zeichen + als baares Geld. Und daher nennet man auch die ersten weniger als nichts, weil man erst so viel weg geben muß, als man schuldig ist, ehe man nichts hat.

Die 2. Anmerkung.

30. Damit euch die Rechnung mit Buchstaben deutlicher werde, so bildet euch ein, a bedeute 1 thl. b 1 gl. c 1 pf.

$$\begin{array}{r} 7a-9b+5c \\ 3a+5b-9c \\ \hline 10a-4b-4c \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\text{ thl.}-9\text{ gl.}+5\text{ pf.} \\ 3\text{ thl.}+5\text{ gl.}-9\text{ pf.} \\ \hline 10\text{ thl.}-4\text{ gl.}-4\text{ pf.} \end{array}$$

Die

Die 2. Aufgabe.

31. Einerley Größen mit einerley oder verschiedenen Zeichen von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

1. Wenn einerley Zeichen sind, und ihr sollet das Kleinere von dem Größern abziehen, so verrichtet die Subtraction, wie in Ziffern (§. 49. *Arithm.*).
2. Sollet ihr aber die größere von der kleinern abziehen, so ziehet die kleinere von der größern ab, und zu dem Uebrigen setzet das Zeichen —, wenn die Größen + haben: hingegen +, wenn sie — haben.
3. Wenn die Zeichen verschieden sind, so addiret die Größen, welche ihr von einander abziehen sollet, und zu der Summe setzet das Zeichen derjenigen Größe, von welcher die Subtraction geschehen sollte.

Exempel.

$$\begin{array}{r} 8a - 5c + 9d \\ 6a - 8c - 7d \\ \hline 2a + 3c + 16d \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\text{ thl.} - 5\text{ gl.} + 9\text{ pf.} \\ 6\text{ thl.} - 8\text{ gl.} - 7\text{ pf.} \\ \hline 2\text{ thl.} + 3\text{ gl.} + 16\text{ pf.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9b + 15c - 7d + 8e - f \\ 6b + 20c - 9d - 9e + 7f \\ \hline 3b - 5c + 2d + 17e - 8f. \end{array}$$

Oder, verwandelt die Zeichen in widrige von den Größen, welche ihr abziehen sollet, und addiret sie zu den andern (§. 28.).

Beweis.

Weil ihr jeden Buchstaben als Eins ansehen könnet (§. 9. 15.); so könnet ihr auch, wie in Zahlen, die Subtraction verrichten. Allein, wenn ihr die größere von der kleinern abziehet, und sie haben das Zeichen +, als 20c von 15c, so nehmet ihr 20c weg, ihr müsset aber wieder von oben die 15c addiren, und dannenhero fehlen nur noch so viel c, als der Unterscheid zwischen 20 und 15 ist, nämlich 5. Hingegen wenn das Zeichen — ist, als wenn ihr —9d von —7d abziehen sollet; so müsset ihr —9d addiren, weil ihr es zu viel abgezogen habt. Denn, ihr solltet 20c—9d wegnehmen: ihr habt aber 20c ganz weggenommen. Da nun oben 7d fehlen, so heben sich von den 9d, welche ihr dazu addiret, 7 auf, und bleiben nur noch 2d übrig. Darum dürfet ihr in diesen Fällen nur allezeit die kleinere von der größern abziehen, und zu dem Uebrigen das widrige Zeichen setzen, nämlich —, wenn ihr + habt, und +, wenn — ist. Endlich, wenn die Zeichen verschieden sind, und ihr sollet z. E. —9e von +8e abziehen; so wisset ihr aus dem vorhergehenden, daß die unteren 9e addiret werden müssen, weil ihr zu viel in dem vorhergehenden abgezogen habt. Und demnach bekommet ihr +17e. Hingegen, wenn ihr z. E. +7f von —f subtrahiren sollet; so fehlet euch schon ein f. Wenn ihr nun die 7f auch wegnehmen sollet, so fehlen euch zusammen 8f. Daher habt ihr in beyden Fällen nur nöthig, die Größen zu addiren, und zu der Summe das Zeichen zusetzen, welches die Größe hat, von welcher die Subtraction geschiehet. W. Z. E.

Die 3. Aufgabe.

32. Größen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu multipliciren.

Auflösung.

Verrichtet die Multiplication, wie in Zahlen (§. 55. *Arithm.*), nur merket: daß einerley Zeichen in dem Producte +, verschiedene aber − geben.

Exempel.

$a+b-d$	$10=8+4-2$
$a-b-d$	$2=8-4-2$
$-ad-bd+dd$	$-16-8+4$
$-ab-bb+bd$	$-32-16+8$
$aa+ab-ad$	$64+32-16$
$aa-bb-2ad+dd$	$20=68-48.$

Beweis.

Wenn ihr + durch + multipliciret, so ist klar, daß das Product auch + haben muß. Imgleichen ist nicht schwer zu begreifen, daß in dem Producte das Zeichen − seyn muß, wenn ihr + durch − multipliciret, weil ihr einen Mangel oder eine Schuld etlichemal nehmet. Allein, wenn − durch − multiplicirt wird, so scheint es nicht gleich klar zu seyn, warum in dem Producte + ist. Merket demnach, daß, wenn ihr 3 − 2 durch − 2 multipliciren sollet, ihr den Defect − 2 so vielmal nehmen sollet, als 3 − 2 Einheiten hat; das ist, 1 mal. Da ihr nun anfangs 3 mit − 2 multipliciret, so nehmet ihr den Defect 3 mal, und demnach 2 mal zu viel. Derowegen müsset ihr ihn noch zweymal dazu addiren. Und also giebt − 2 mit − 2 zum Producte + 4. W. Z. E.

Zusatz.

33. Wenn ihr $-a$ mit $+b$ multipliciret, so kommt $-ab$ heraus. Derowegen, wenn ihr $-ab$ durch $+b$ dividiret, so muß $-a$ herauskommen. Dividiret ihr aber $-ab$ durch $-a$, so muß $+b$ herauskommen. Demnach ist klar, daß auch in der Division die Regel gilt: Einerley Zeichen geben in dem Quotienten $+$, verschiedene aber $-$.

Die 4. Aufgabe.

34. Größen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu dividiren.

Auflösung.

Wenn eine gegebene Größe durch die andere sich wirklich dividiren läßt; so verfahret, wie in Zahlen (§. 59. *Arithm.*), nur daß ihr die Regel von den Veränderungen der Zeichen wohl in Acht nehmet (§. 33.).

Kann aber die Division nicht wirklich geschehen, so bleibt es bey dem, was oben (§. 24. & seqq.). ist gesagt worden.

Exempel.

$$\begin{array}{rl}
 & aa-bb-2ad+dd \;(a+b-d \\
a-b-d) & aa-ab-\;ad \\ \hline
 & +ab-bb-\;ad+dd \\
a-b-d) & +ab-bb-\;bd \\ \hline
 & +bd-ad+\;dd \\
a-b-d) & -ad+bd+\;dd \\ \hline
 & 0.
\end{array}$$

Anmer-

Anmerkung.

35. Weil die Buchstaben nicht wie die Zahlen eine Bedeutung von der Stelle haben, in welcher sie stehen; so dürfet ihr euch hier an keine Ordnung binden, sondern möget den Quotienten suchen, in welchem Gliede ihr ihn findet: welches auch in dem Subtrahiren des Products aus dem Divisore in den Quotienten statt findet.

Die 4. Erklärung.

36. Wenn man eine Größe durch sich selbst multiplicirt, so heißt das Product, welches heraus kommt, die andere Potenz oder Dignität derselben Größe. Multipliciret ihr die andere Dignität noch einmal durch die erste, so kommt die dritte Potenz oder Dignität heraus. Multipliciret ihr ferner die dritte durch die erste, so kommt die vierte Potenz oder Dignität heraus. Multipliciret ihr die vierte durch die erste, so kommt die fünfte Potenz oder Dignität heraus u. s. w. Die erste Stammgröße, welche die erste Dignität genennet wird, heißt auch die Wurzel, in Ansehung der andern, dritten, vierten, fünften ꝛc. Dignität.

Der 7. willkührliche Satz.

37. Den Grad der Potenz oder Dignität einer Größe deutet durch eine kleine Ziffer, oder, wenn er nicht determinirt ist, durch einen kleinen Buchstaben an, welchen ihr oben zur Rechten an diejenigen Buchstaben setzet, wodurch die Größe benennet wird. Z. E. Die andere, dritte, vierte ꝛc. Dignität von x ist x^2, x^3, x^4, ꝛc. x^m. Die Zahlen aber werden die Exponenten der Dignitäten genennet.

Der 1. Zusatz.

38. Dannenhero, wenn ihr eine Dignität durch eine andere von eben der Wurzel multipliciren sollet, so dürfet ihr nur ihre Exponenten zusammen addiren.

Exempel.

$$\frac{x^3 \cdot x^4}{x^7} \qquad \frac{y^m \cdot y^n}{y^{m+n}} \qquad \frac{x^m \cdot x^r}{x^{m+r}} \qquad \frac{x^n \cdot x^n}{x^{2n}}$$

Der 2. Zusatz.

39. Hingegen, wenn ihr die Dignität einer Größe durch eine andere Dignität derselben dividiren sollet; so dürfet ihr nur ihre Exponenten von einander subtrahiren.

Exempel.

$$\frac{x^7 : x^4}{x^3} \qquad \frac{x^7 : x^3}{x^4} \qquad \frac{y^{m+n} : y^n}{y^m} \qquad \frac{y^n : y^r}{y^{n-r}}.$$

Der 3. Zusatz.

40. Endlich, wenn ihr die Dignität einer Größe zu einer andern Dignität erheben sollet, so dürfet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der andern multipliciren. Z. E. Ihr sollet x^3 zu der vierten Dignität erheben; so multipliciret 3 durch 4, und nehmet x^{12} für die gesuchte Dignität an. Oder überhaupt ist die Dignität n von $y^m = y^{mn}$.

Anmerkung.

41. Die Ursach ist leicht zu errathen. Denn ihr sollt den Exponenten 3 viermal zu sich selbst addiren (§. 38.).

Dieses

Dieses aber geschiehet, wenn ihr ihn durch 4 multipliciret (§. 23. *Arithm.*).

Der 4. Zusatz.

42. Folglich, wenn ihr aus einer gegebenen Dignität eine verlangte Wurzel ziehen sollet, das ist, diejenige Größe finden, welche zu einer gewissen Dignität ist erhoben worden, (§. 90. 91. *Arithm.* & §. 36. *Algebr.*); so dürfet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der Wurzel dividiren. Z. E. Die Wurzel der vierten Dignität aus x^{12} ist x^3, die Wurzel m aus x^n ist $x^{n:m}$.

Anmerkung.

43. Merket wohl diese Art, die Wurzeln zu zeichnen, denn ihr werdet inskünftige großen Vortheil davon haben.

Der 8. willkührliche Satz.

44. Wenn ihr die Wurzel aus einer Größe ziehen sollet, dergleichen sie nicht hat, so setzet folgendes Wurzelzeichen vor sie, und darüber den gehörigen Exponenten der Wurzel: in der Quadratwurzel aber könnet ihr den Exponenten weglassen. Also schreibet ihr die Cubicwurzel von x, $\sqrt[3]{x}$; hingegen die Wurzel der fünften Dignität von x schreibet ihr $\sqrt[5]{x}$.

Zusatz.

45. Weil $\sqrt{x} = x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{2:3}$, $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 42.); so könnet ihr jederzeit eine Formul in die Stelle der andern setzen, nachdem ihr von dieser oder von jener einen Vortheil haben könnet.

Die 5. Erklärung.

46. Die Wurzel dergleichen Größen, woraus die verlangte Wurzel nicht genau gezogen werden kann, werden Irrationalgrößen, oder, wenn es Zahlen sind, Irrationalzahlen genennet. Dergleichen sind $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{6}$.

Anmerkung.

47. Die Irrationalgrößen können entweder eine Benennung haben, als $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{5}$, oder verschiedene, als $\sqrt[4]{3}$ und $\sqrt[5]{6}$.

Die 5. Aufgabe.

48. Irrationalgrößen von verschiedener Benennung zu einer Benennung zu bringen.

Auflösung.

Es seyn die gegebenen Irrationalgrößen $x^{n:m}$ und $y^{r:s}$.

Weil der Unterscheid der Benennung in dem Unterscheide der Exponenten $^{n:m}$ und $^{r:s}$ bestehet, hingegen man diese Brüche in andere gleichgültige verwandeln kann, welche einerley Benennung haben (§. 81. *Arithm.*); so ist weiter nichts vonnöthen, als daß ihr die Exponenten unter einerley Benennung bringet, und die dadurch gefundenen Brüche in die Stelle der Exponenten schreibet. So werdet ihr finden, daß $x^{n:m} \pm y^{r:s} = x^{ns:ms} \pm y^{mr:ms} = \sqrt[ms]{x^{ns}} \pm \sqrt[ms]{y^{mr}}$.

Anmerkung.

49. Auf eben diese Art könnet ihr mit den Irrationalzahlen verfahren. Z. E. Ihr sollet $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt{3}$ unter eine Benennung bringen. Weil $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ und $\sqrt{3} = 3^{1:2}$, so findet

det ihr $5^{1:3}+3^{1:2}=5^{2:6}+3^{3:6}=\sqrt[6]{5^2}+\sqrt[6]{3^3}=$ (wenn ihr die Größen unter dem Wurzelzeichen wirklich zu ihren Dignitäten erhebt) $\sqrt[6]{25}+\sqrt[6]{27}$.

Die 6. Aufgabe.

50. Irrationalgrößen auf eine kürzere Art auszudrucken.

Auflösung.

Weil $\sqrt[m]{a^n x^m}=a^{n:m}x^{m:m}=a^{n:m}x=x\sqrt[m]{a^n}$ (§. 42.); so

1. Dividiret die Größe unter dem Wurzelzeichen durch eine Dignität von dem Grade, welcher einerley Exponenten mit der Wurzel hat, als durch einen Cubum, wenn die Irrationalgröße eine Cubicwurzel ist. Denn, wenn dergleichen Division nicht angehet, so könnet ihr auch die Irrationalgröße nicht kürzer ausdrucken.
2. Den Quotienten lasset unter dem Wurzelzeichen.
3. Vor das Wurzelzeichen aber setzet die Wurzel der Dignität, wodurch ihr dividiret.

So ist geschehen, was man verlangte.

Exempel.

$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8.3}=2\sqrt[3]{3}$.

Imgleichen $\sqrt{18}=\sqrt{9.2}=3\sqrt{2}$.

Wiederum $\sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{16.3}=2\sqrt[4]{3}$.

Der 1. Zusatz.

51. Wenn ihr die Irrationalgrößen von einerley Art solchergestalt reduciret, und es bleibt unter dem Wurzelzeichen einerley Größe stehen; so verhalten sie sich gegen einander, wie die Rational-

größen vor dem Wurzelzeichen. Z. E. $\sqrt{8}=\sqrt{4.2}=2\sqrt{2}$ und $\sqrt{18}=\sqrt{9.2}=3\sqrt{2}$. Derowegen ist $2\sqrt{2}:3\sqrt{2}=2:3$ (§. 75. *Arithm.*).

Der 2. Zusatz.

52. Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe finden, ob zwo Irrationalgrößen eine Verhältniß gegen einander haben, welche sich durch Rationalgrößen ausdrucken lässet, z. E. daß $\sqrt{8}:\sqrt{18}=2:3$ (§. 51.).

Der 3. Zusatz.

53. Weil ihr in solchergestalt reducirten Irrationalgrößen den Theil, welcher irrational bleibt, für den Namen der Einheit mit Recht haltet (§. 5. & *seqq. Arithm.*); so könnet ihr die Summe oder den Unterscheid der Irrationalgrößen finden, welche unter dem Wurzelzeichen einerley Größen haben, und von einerley Art sind, wenn ihr die Rationalgrößen vor dem Wurzelzeichen zusammen addiret oder von einander subtrahiret. So werdet ihr finden, daß $\sqrt{8}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ und $\sqrt{18}-\sqrt{8}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$. Imgleichen $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{8.3}+\sqrt[3]{27.3}=2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{3}$.

Der 4. Zusatz.

54. Wenn ihr die Größen, welche zum Theil rational, zum Theil irrational sind, ganz irrational machen sollet; so müsset ihr die Größe vor dem Wurzelzeichen zu der Dignität erheben, welche der Exponent über dem Wurzelzeichen andeutet, und durch selbige die Größe unter dem Wurzelzeichen multipliciren. So werdet ihr finden, daß $5\sqrt{2}=\sqrt{25.2}=\sqrt{50}$ und $5\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3.5^3}=\sqrt[3]{3.125}=\sqrt[3]{375}$.

Die

Die 1. Anmerkung.

55. Damit ihr erfahret, ob eine vorgegebene Zahl sich durch eine Dignität von einem gegebenen Grade dividiren lässet, oder nicht, so dürfet ihr sie nur in diejenigen Zahlen zergliedern, durch deren Multiplication sie entstehet. Dieses aber geschiehet, wenn ihr sie mit den einzelnen Zahlen zu dividiren anfanget. Z. E. Ihr sollt auf solche Weise 368 zergliedern, so findet ihr:

2	184
4	92
8	46
16	23

Die 2. Anmerkung.

56. Wem die Irrationalrechnungen anfangs verdrüßlich fallen, der kann sie so lange überschlagen, bis sie unten vorkommen. Er hüte sich aber mit Fleiß, daß er nicht für unnütze Grillen halte, wovon er den Nutzen nicht bald sehen kann. Ihr werdet in dem Folgenden erfahren, daß ich niemals eine Lehre vortrage, welche nicht ihren gewissen Nutzen hat.

Die 7. Aufgabe.

57. **Eine Irrationalgröße durch eine andere von einerley Art zu multipliciren.**

Auflösung.

Weil $\sqrt[m]{a^n} = a^{n:m}$ und $\sqrt[m]{b^r} = b^{r:m}$ (§. 42.); so ist $\sqrt[m]{a^n} . \sqrt[m]{b^r} = a^{n:m} b^{r:m}$ (§. 20.) $= \sqrt[m]{a^n b^r}$ (§. 45.). und erhellet hieraus folgende Regel:

1. Multipliciret die Größen unter dem Wurzelzeichen (a^n und b^r) durch einander.
2. Vor das Product setzet das Wurzelzeichen mit seinem Exponenten ($\sqrt[m]{}$).

So werdet ihr finden, daß $\sqrt{2} . \sqrt{3} = \sqrt{6}$, und $\sqrt[3]{5} . \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$.

Zusatz.

58. Wenn ihr also eine Irrationalzahl durch eine andere Irrationalzahl dividiren sollet, so dürfet ihr nur die Zahlen unter dem Wurzelzeichen durch einander dividiren. So werdet ihr finden, daß $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7}$ und $\sqrt{6} : \sqrt{3} = \sqrt{2}$.

Die 8. Aufgabe.

59. **Eine Aufgabe algebraisch aufzulösen.**

Auflösung.

1. Unterscheidet mit Fleiß die bekannten Größen von den unbekannten, und benennet jene mit den ersten, diese mit den letzten Buchstaben des Alphabets (§. 15.). Wenn die Benennung geschehen ist, so
2. Suchet eine Gleichung, daß ihr nämlich eine Sache mit zweyerley Namen beleget: denn so müssen die beyden Werthe einander gleich seyn (§. 27. *Arithm.*). Ihr müsset aber so viel Gleichungen finden, als ihr unbekannte Größen habt. Wenn es nicht angehet, so ist es ein Zeichen, daß ihr die eine unbekannte Größe so groß annehmen könnet, als ihr wollet. Und pflegt man dergleichen Aufgaben undeterminirte Aufgaben zu nennen. Es sind aber die Gleichungen entweder in der Aufgabe selbst angedeutet, oder ihr müsset sie aus ihren Umständen durch Hülfe derjenigen Lehrsätze suchen, welche von der Gleichheit handeln.
3. Wenn in den Gleichungen bekannte und unbekannte Größen mit einander vermenget sind, so müsset ihr sie dergestalt einrichten, daß auf einer Seite lauter bekannte, auf der andern aber nur

eine unbekannte stehen bleibt: Welches geschiehet, wenn ihr die Größen, welche subtrahiret sind, durch Addiren; welche addiret sind, durch Subtrahiren; welche andere multipliciren, durch Dividiren; welche andere dividiren, durch Multipliciren wegbringet: oder auch die Wurzeln zu ihren Dignitäten erhebet, oder aus den Dignitäten die gehörigen Wurzeln ausziehet: damit ihr immer eine Gleichheit erhaltet (§. 30. 31. 32. 33. *Arithm.* & §. 36. *Algebr.*).

Anmerkung.

60. Unerachtet die Einrichtung der gefundenen Gleichung sehr oft auf beschriebene Weise geschehen kann; so gehet es doch nicht in allen Fällen an. Wir wollen aber erst diese Regeln uns durch Exempel bekannt machen, ehe wir zu andern schreiten. Denn die Algebra lernet man nicht so wohl durch Regeln, als durch Exempel.

Die 9. Aufgabe.

61. Aus der gegebenen Summe zwoer Größen und ihrem Unterscheide die Größen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $=a$, die kleine Größe $=x$, der Unterscheid $=b$, die große $=y$.

So ist

$x+y=a$ (§. 15. *Arithm.*)	$y-x=b$ (§. 18. *Arithm.*)
x x *subtr.*	x x *add.*
$y=a-x$	$y=b+x$

demnach

demnach

$$
\begin{array}{llr}
a-x=b+x & (\text{§. 28. } Arithm.) & \\
\quad x \qquad x & add. & \\
\hline
a=b+2x & & \\
b \quad b & & subtr. \\
\hline
a-b=2x & & \\
\hline & & 2\ div. \\
\frac{a-b}{2}=x. & &
\end{array}
$$

Folglich ist die größere $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+b=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.

Regel.

Ziehet den Unterscheid der beyden Größen (b) von der Summe (a) ab. Den Rest dividiret durch zwey; so ist der Quotient die kleine Größe (x). Addiret den Unterscheid zu der Summe; so ist die Hälfte davon die große Größe (y).

Z. E. Es sey $a=30$, $b=8$, so ist $(a-b):2=(30-8):2=22:2=11$, und $(a+b):2=(30+8):2=38:2=19$.

Probe.

Denn $19-11=8$, und $19+11=30$. Oder allgemein:

$$
\begin{array}{rl}
 & \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \\
add & \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b \\
\hline
\text{Summe} & a,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \\
subtr. & \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b \\
\hline
\text{Untersch.} & b.
\end{array}
$$

Anmerkung.

62. Ihr könnet jederzeit aus der letzten Gleichung eine Regel machen, durch welche die Aufgabe in allen vorkommenden Fällen aufgelöset werden kann, wenn ihr vor die Buchstaben die Namen der Sachen setzet, welche sie bedeuten,

ten, und anstatt der Zeichen die Rechnungsarten benennet, welche sie andeuten: allein der Kürze halber werde ich ins künftige keine Regel hersetzen, wenn es nicht besondere Umstände erfordern. Und dieses thue ich um so viel lieber, weil man die Exempel in Zahlen viel hurtiger auflösen kann, wenn man die Ziffern in die Stelle der Buchstaben setzet, als wenn man nach der Regel verfährt. Auch ist zu merken, daß öfters in den Gleichungen, in welchen noch Bekanntes und Unbekanntes mit einander vermenget ist, nützliche Lehrsätze enthalten sind. Z. E. Aus der Gleichung $a - b = 2x$ erhellet folgender Lehrsatz:

Wenn man von der Summe zwoer Größen ihren Unterscheid abziehet; so ist der Rest zweymal so groß als die kleinere.

Die 10. Aufgabe.

63. **Eine Zahl zu finden, deren Hälfte, ein Drittel, und ein Viertel zusammen, um 1 größer sind als die Zahl selbst.**

Auflösung.

Es sey die gesuchte Zahl $= x$, so ist,

$$x + 1 = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x$$

$$= \frac{12x + 8x + 6x}{24}$$

$$= \tfrac{26}{24}x \text{ (§. 82. Arithm.)}$$

$$= x + \tfrac{1}{12}x \text{ (§. 78. 80. Arithm.)}$$

$$\overline{1 = \tfrac{1}{12}x}$$

$$\overline{}\ 12\ mult.$$

$$12 = x.$$

Probe $\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13.$

Es ist demnach nichts mehr als die einige Zahl 12, welche diese Eigenschaft hat.

Die 11. Aufgabe.

64. **Aus der gegebenen Summe zwoer Zahlen und dem Producte einer Zahl in die andere, die Zahlen selber zu finden.**

Auflö=

Auflösung.

Es sey die Summe $=a$, die halbe Differenz $=x$;
das Product $=b$,
so ist die große Zahl $\frac{1}{2}a+x$ } §. 61.
die kleine $\frac{1}{2}a-x$

$$\frac{1}{4}aa-xx=b \quad (\text{§. 32.})$$
$$xx \quad xx \quad add.$$
$$\frac{1}{4}aa=b+xx$$
$$b \quad b \quad subtr.$$
$$\frac{1}{4}aa-b=xx$$
$$rad.\ extr.$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa-b)}=x.$$

Also ist die große Zahl $\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}aa-b)}$; die kleine $\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}aa-b)}$.

Es sey $a=14$, $b=48$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{4}aa-b)}=\sqrt{(49-48)}=1$, folglich die große Zahl $\frac{1}{2}a+x=7+1=8$, und die kleine $\frac{1}{2}a-x=7-1=6$.

Probe. Denn $8+6=14$ und $6.8=48$.

Anmerkung.

65. Es ist an der Benennung öfters viel gelegen. Denn, wenn ihr in gegenwärtiger Aufgabe die große Zahl x, die kleine y nennet: so kommet ihr auf eine Gleichung, welche ihr noch nicht aufzulösen vermögend seyd. Merket dabey den Lehrsatz, welchen die Gleichung $\frac{1}{4}aa=b+xx$ an die Hand giebt:

Das Quadrat der halben Summe zwoer Größen ist gleich dem Producte derselben in einander und dem Quadrate des halben Unterscheides.

Die 12. Aufgabe.

66. **Es wird gegeben die Summe gleicher Dignitäten zwoer Größen, und der Unterscheid selbiger Dignitäten, ihr sollt die Größen selbst finden.**

Auflö-

Auflösung.

Es sey die Summe $=a$, die kleine Größe $=x$,
der Unterscheid $=b$, die große $=y$;

so ist

$$x^m + y^m = a \qquad y^m - x^m = b$$
$$y^m = a - x^m \qquad y^m = b + x^m$$

folglich

$$a - x^m = b + x^m$$
$$a = b + 2x^m$$
$$a - b = 2x^m$$
$$(a-b):2 = x^m$$
$$\sqrt[m]{(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)} = x.$$

Es sey $m=2$, $a=97$, $b=65$; so ist $x=\sqrt{(\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b)}=\sqrt{(48\tfrac{1}{2}-32\tfrac{1}{2})}=\sqrt{16}=4$, und $y=\sqrt{(b+x^2)}=\sqrt{(65+16)}=\sqrt{81}=9$.

Probe: Denn $81+16=97$ und $81-16=65$.

Die 13. Aufgabe.

67. Zwo Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß das Product einer jeden in die Quadratwurzel der andern einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey das eine Product $=a$ die eine Zahl $=x$
das andere $=b$ die andere $=y$;

So ist $x\sqrt{y}=a \qquad y\sqrt{x}=b$

$$x^2y = a \qquad y^2x = b^2$$
$$x = b^2 : y^2$$
$$x^2 = b^4 : y^4.$$

Wenn

Wenn ihr den Werth von x^2 in die erste Gleichung zur Linken x^2y setzet, so bekommet ihr

$$b^2y:y^2=b^4:y^3=a^2$$

$$\overline{\qquad\qquad} y^3.\ mult.$$

$$b^4=a^2y^3$$

$$b^4:a^2=y^3$$

$$\sqrt[3]{(b^4:a^2)}=y.$$

Es sey $a=18$, $b=12$, so ist $y=\sqrt[3]{(b^4:a^2)}=\sqrt[3]{(20736:324)}=\sqrt[3]{64}=4$ und $x=b^2:y^2=144:16=9$.

Probe: Denn $9.2=18$, und $4.3=12$.

Die 14. Aufgabe.

68. Aus der gegebenen Summe zwoer Größen und der Differenz ihrer Quadrate, die beyden Größen zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $=a$, die Differenz der Quadr. $=b$, die halbe Differenz der Größen $=y$,

So ist die eine Größe $\frac{1}{2}a+y$ } §. 16.
Die andere $\frac{1}{2}a-y$ }

Das Quadrat der erstern $\frac{1}{4}aa+ay+yy$,
Das Quadrat der andern $\frac{1}{4}aa-ay+yy$,

Die Differenz $b=2ay$

$$\overline{\qquad\qquad} 2a$$

folglich $b:2a=y$.

Es sey $b=40$, $a=10$; so ist $y=40:20=2$; folglich die eine Zahl $\frac{1}{2}a+y=5+2=7$, die andere $\frac{1}{2}a-y=5-2=3$.

Probe: Denn $7+3=10$, und $49-9=40$.

Die

Die 15. Aufgabe.

69. Aus der gegebenen Summe zwoer Grössen und der Summe ihrer Quadrate, die beyden Größen zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste Summe $=a$, die eine Größe $\frac{1}{2}a+y$ (§.61.).
Die andere $=b$, die andere $\frac{1}{2}a-y$
So ist das Quadrat der erstern $\frac{1}{4}aa+ay+yy$
der andern $\frac{1}{4}aa-ay+yy$

Die Summe $b=\frac{1}{2}aa+2yy$.

Folglich $b-\frac{1}{2}aa=2yy$

$\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}aa=yy$

$\sqrt{(\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}aa)}=y$.

Es sey $a=10$, $b=58$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}aa)}=\sqrt{(29-25)}=\sqrt{4}=2$: folglich $\frac{1}{2}a+y=5+2=7$, und $\frac{1}{2}a-y=5-2=3$.

Probe: Denn $7+3=10$, und $49+9=58$.

Die 16. Aufgabe.

70. Zwo Zahlen zu finden, deren Product einer gegebenen Zahl gleich ist, das Quadrat aber der Summe zu dem Quadrate der Differenz beyder Zahlen eine gegebene Verhältniß hat.

Auflösung.

Es sey das Product $=a$, die Summe $=2x$, die gegebene Verhältniß $=b:c$, der Unterscheid $=2y$,
so ist die eine Zahl $x+y$,
die andere $x-y$,

und also

$$xx - yy = a \qquad b : c = 4x^2 : 4y^2 = x^2 : y^2 \text{ (§. 75. Arithm.)}$$

$$xx = a + y^2 \qquad by^2 = cx^2 \text{ (§. 109. Arithm.)}$$

$$by^2 : c = x^2.$$

Folglich

$$a + y^2 = by^2 : c$$

$$ac + cy^2 = by^2$$

$$ac = by^2 - cy^2$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; b - c \text{ div.}$$

$$ac : (b - c) = y^2$$

$$\sqrt{ac} : \sqrt{(b - c)} = y.$$

Es sey $a = 96$, $b : c = 25 : 1$, so ist $y = \sqrt{96} : \sqrt{(25 - 1)}$ $= \sqrt{4}$ (§. 58.) $= 2$; und $x = \sqrt{(a + y^2)} = \sqrt{(96 + 4)}$ $= \sqrt{100} = 10$: folglich $x + y = 10 + 2 = 12$, und $x - y = 10 - 2 = 8$.

Probe: $12.8 = 96$, und $25 : 1 = 400 : 16$.

Die 17. Aufgabe.

71. Aus der gegebenen Tagereise zweener Bothen und der Zeit, in welcher der andere dem erstern nachgehet, die Zeit zu finden, in welcher er ihn einholet.

Auflösung.

Es sey die Tagereise des erstern $= a$,
die gesuchte Zeit $= x$,
des andern $= b$,
die gegebene Zeit $= c$.

So ist die Reise des erstern in der gegebenen Zeit $= ac$, in der gesuchten $= ax$. Die Reise des andern in der letztern Zeit $= bx$. Da nun beyde einen gleichen Weg zurücke gelegt haben; so ist

ac

$$ac + ax = bx$$
$$\quad ax \quad ax \quad \textit{subtr.}$$
$$ac = bx - ax = (b-a)x$$
$$\qquad b-a \; \textit{div.}$$
$$ac : (b-a) = x.$$

Es sey $a=6$, $b=8$, $c=4$; so ist $x=24:(8-6)$ $=\frac{24}{2}=12$.

Probe: Denn $12.8=96$, und $4.6+12.6=24$ $+72=96$.

Anmerkung.

72. Weil man in Auflösung dieser Aufgabe weder auf den Begriff der Tagereise, noch der Bothen siehet; so ist daraus abzunehmen, daß sie bey der Bewegung aller Körper kann angebracht werden.

Die 18. Aufgabe.

73. Aus der gegebenen Tagereise eines Bothen und der Zeit, da er hinweg ist, die Tagereise eines andern Bothen zu bestimmen, welcher ihn in einer gegebenen Zeit einholen soll.

Auflösung.

Es sey die Tagereise des erstern $=a$,
des andern $=x$,
die verflossene Zeit $=b$,
die gegebene Zeit $=c$;
so findet man wie in der vorhergehenden Aufgabe

$$ab + ac = cx$$
$$(ab + ac) : c = x$$

Es sey $a=6$, $b=4$, $c=12$; so ist $x=24+72:12$ $=96:12=8$.

Probe: Denn $24+72=96$ und $8.12=96$.

Die 19. Aufgabe.

74. Aus der gegebenen Weite zweener Oerter von einander, aus welchen zu gleicher Zeit zween Bothen ausreisen, und der Tagereise eines jeden, die Zeit zu bestimmen, in welcher sie einander begegnen.

Auflösung.

Es sey die Weite $=a$, die gesuchte Zeit $=x$,
die Tagereise des erstern $=b$,
des andern $=c$.

So ist der Weg des erstern in der zu bestimmenden Zeit $=bx$; des andern $=cx$: folglich, weil beyde zusammen die ganze Weite der Oerter von einander durchreiset,

$$bx+cx=a$$

das ist $(b+c)x=a$

$$x=a:(b+c).$$

Es sey $a=120$, $b=6$, $c=4$; so ist $x=120:(6+4)$ $=120:10=12$. Sie begegnen also einander in dem zwölften Tage.

Probe: Denn $6.12+4.12=72+48=120$.

Die 20. Aufgabe.

75. Aus dem gegebenen Werthe einer Kanne guten Weins, zu bestimmen, wie viel man Wasser darunter mischen muß, damit man das Maaß um einen verlangten geringern Preis geben kann.

Auflösung.

Der höhere Preis sey $=a$, das Wasser $=x$,
der geringere $=b$,
das Kannenmaaß $=1$.

Da

Da nun der Preis von $1=b$, so ist der Preis von $1+x=b+bx$ (§. 113. *Arithm.*): und daher, weil das Wasser x nichts gilt,

$$b+bx=a \quad (\S.\ 28.\ \textit{Arithm.})$$

$$bx=a-b$$

$$x=(a-b):b$$

Es sey $a=16$, $b=10$; so ist $x=(16-10):10 =\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Probe: Denn wenn $1\frac{3}{5}$ Kannen 16 Groschen kommen; so kommt eine Kanne 10 Groschen (§. 113. *Arithm.*).

Die 21. Aufgabe.

76. Aus dem gegebenen Preise zweener Weine von verschiedener Güte, zu bestimmen, wie viel man von dem geringern zu dem bessern gießen muß, damit man ihn vor einen verlangten Preis geben kann.

Auflösung.

Es sey der Preis des guten $=a$, des schlechtern $=b$; des vermischten $=c$, das Kannenmaaß $=1$, die Größe des schlechtern $=x$, so ist sein Preis $=bx$, die Größe des guten $=1-x$, sein Preis $=a-ax$.

Folglich:

$$a-ax+bx=c \quad (\S.\ 28.\ \textit{Arithm.})$$
$$ax \qquad ax$$

$$a+bx=ax+c$$
$$bx \qquad bx$$

$$a=ax-bx+c$$
$$c \qquad c$$

$$a-c=ax-bx=(a-b)x$$
$$a-b \ div.$$

$$(a-c):(a-b)=x.$$

Es

Es sey $a=16$, $b=10$, $c=12$; so ist $x=(16-12:(16-10)=4:6=\frac{2}{3}$. Demnach werden von dem schlechten $\frac{2}{3}$ und von dem guten $\frac{1}{3}$ genommen.

Probe: Denn $\frac{1}{3}$ von dem guten kommt $5\frac{1}{3}$ Gr. und $\frac{2}{3}$ von dem schlechten $6\frac{2}{3}$ Gr. folglich der vermischte 12 Gr.

Anmerkung.

77. Die auf besondere Arten der Fälle gerichtete Aufgaben sind schwerer aufzulösen, als die allgemeinern von Zahlen und Größen. Denn, man hat hier viele besondere Umstände, welche zur Auflösung der Aufgabe nichts beytragen, und es ist öfters, sonderlich vor Anfänger, nicht eine geringe Mühe, wenn man die Aufgaben von den besondern und zur Auflösung nicht dienenden Umständen befreyen soll.

Die 6. Erklärung.

78. Wenn die Wurzel einer Dignität oder Potenz aus zween Theilen bestehet, so nennet man sie eine binomische Wurzel, als $a+b$. Bestehet sie aus dreyen Theilen, als $a+b+c$; so heißt sie eine trinomische Wurzel: wenn sie aus vier Theilen bestehet, eine quadrinomische Wurzel u. s. w. überhaupt aber nennet man sie eine polynomische Wurzel, wenn sie aus mehr als zween Theilen bestehet.

Die 22. Aufgabe.

79. Die Natur des Quadrats oder der andern Dignität einer binomischen Wurzel zu finden.

Auflösung.

Ihr verlanget zu wissen, wie das Quadrat einer binomischen Wurzel entstehen kann (§. 4. *Method. Mathem.*). Multipliciret demnach die binomische Wurzel $a+b$ durch sich selbst, so wird das

Product

Product zeigen, aus was vor Theilen das Quadrat zusammen gesetzt wird, und wie diese Theile des Quadrats aus den Theilen der Wurzel entstehen.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline +ab+b^2 \\ a^2+ab \quad \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$ Quadrat der binomischen Wurzel.

Lehrsatz.

Das Quadrat der binomischen Wurzel begreift in sich die Quadrate der beyden Theile (a^2 und b^2) und ein Product ($2ab$) aus dem einen Theile zweymal genommen ($2a$) in den andern (b).

Anmerkung.

80. Ihr habt hier auf eine sehr leichte Art den andern Lehrsatz der Rechenkunst (§. 93. *Arithm.*) gefunden, aus welchem wir die Ausziehung der Quadratwurzel (§. 97. *Arithm.*) hergeleitet haben. Wenn ihr aber dieselben Regeln vergessen hättet; so könnte euch dieses allgemeine Exempel $a^2+2ab+b^2$ anstatt derselben dienen. Denn, ihr sehet, daß, wenn ihr in der ersten Classe zur Linken das darinnen befindliche Quadrat a^2 abziehet, ihr den ersten Theil der Wurzel a habt. Wollt ihr nun den andern finden, so müsset ihr mit $2a$, das ist mit dem gefundenen Quotienten, zweymal genommen, die folgende Zahl $2ab$ dividiren, und hernach nicht allein das Product aus dem Divisore $2a$ in den neuen Quotienten b, sondern auch das Quadrat des neuen Quotienten b^2 subtrahiren.

Zusatz.

81. Setzet $a=a+b$, und $b=c$, so kommt für das Quadrat der trinomischen Wurzel $(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$. Und also müsset ihr zu dem binomischen Quadrate noch das Product aus der Summe

der beyden Theile der binomischen Wurzel, zweymal genommen, in den dritten Theil, und das Quadrat des dritten Theils addiren. Setzet $a = a + b + c$, und $b = d$, so kommt für das Quadrat der quadrinomischen Wurzel $(a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2$. Derowegen müsset ihr zu dem Quadrate der trinomischen Wurzel noch das Product aus der Summe der ersten 3 Theile, zweymal genommen, in den vierten Theil, und das Quadrat des vierten Theils addiren. Solchergestalt sehet ihr, daß ihr nach der binomischen Formul auch das Quadrat einer jeden polynomischen Wurzel finden, imgleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede polynomische Wurzel ziehen könnet. Denn, $(a+b+c+d+e \text{ \&c.}) = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2$ u. s. w. unendlich fort.

Die 7. Erklärung.

82. Eine unreine quadratische Gleichung (Æquatio quadratica affecta) wird genennet, in welcher $x \mp ax = \pm b^2$.

Die 23. Aufgabe.

83. **Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.**

Auflösung.

Weil $x^2 . ax = . b^2$, so nehmet x für den einen Theil einer binomischen Wurzel an. Alsdenn wird a die bekannte Größe des andern Gliedes, der andere Theil der Wurzel zweymal genommen, und also $\frac{1}{2}a$ der andere Theil der Wurzel seyn: folglich fehlet zu einem vollkommenen Quadrate das Quadrat von $\frac{1}{2}a$, nämlich $\frac{1}{4}aa$ (§. 79.). Wenn

ihr

ihr nun solches beyderseits addiret; so läßt sich die Quadratwurzel ausziehen, und die gegebene Gleichung völlig einrichten.

Es sey $x^2 + ax = b^2$

$$\begin{array}{l} \quad\;\; \tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2 \\ \hline x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a = \tfrac{1}{4}a^2 + b^2 \\ \hline x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)} \\ \hline x = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)} - \tfrac{1}{2}a. \end{array}$$

Es sey ferner:

$$\begin{array}{ll} & x^2 - ax = b^2 \\ \hline \text{so ist} & x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a = \tfrac{1}{4}a^2 + b^2 \\ \hline & x - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)} \\ \text{oder} & \tfrac{1}{2}a - x \\ \hline \text{folglich} & x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}. \end{array}$$

Denn, weil $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$ größer als $\tfrac{1}{2}a$ ist; so gehet die andere Wurzel $x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$ nicht an.

Es sey endlich

$$\begin{array}{ll} & x^2 - ax = -b^2 \\ \hline \text{so ist} & x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b^2 \\ \hline & x - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)} \\ \text{oder} & \tfrac{1}{2}a - x \\ \hline & x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}. \end{array}$$

Weil $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$ kleiner als $\tfrac{1}{2}a$ ist; so läßt es sich von $\tfrac{1}{2}a$ subtrahiren, und also gehen beyde Wurzeln an.

Nämlich dieses findet statt, wenn man zwey unbekannte Größen hat, und es gilt gleich viel, welche von beyden man x nennet, indem immer einerley Gleichungen heraus kommen.

Anmerkung.

84. Den Nutzen dieser Regel werdet ihr inskünftige überflüßig sehen. Jetzt begnügt mich, dieselbe durch die beyden folgenden Aufgaben zu erläutern.

Die 24. Aufgabe.

85. Zwo Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß ihr Product, ihre Summe und die Differenz ihrer Quadrate einander gleich sind.

Auflösung.

Es sey die größere Zahl $=x$,
die kleinere $=y$; so ist

$$x^2 - y^2 = xy, \qquad xy = x + y$$

$$xy - y = x$$

$$y = x : (x-1).$$

Wenn ihr den Werth y in der erstern Gleichung an seine Stelle setzet, so bekommet ihr, weil $y^2 = x^2 : (x-1)^2$, und $xy = x^2 : (x-1)$,

$$x^2 - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2}{x-1}$$

$x^2 - 2x + 1$ *mult.*

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2$$

$$x^4 - 3x^3 = -x^2$$

x^2 *div.*

$$x^2 - 3x = -1$$

$$\tfrac{9}{4} \qquad \tfrac{9}{4} \text{ (§. 83.)}$$

$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4} - 1 = \tfrac{5}{4}$$

$$x - \tfrac{3}{2} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

oder $\tfrac{3}{2} - x =$

$$x = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

oder $x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$.

Ferner,

Ferner, weil $xy-x=y$, so ist $x=y:(y-1)$. Wenn ihr diesen Werth in der erstern Gleichung in die Stelle x setzet, so bekommet ihr

$$\frac{y^2}{y^2-2y+1} - y^2 = \frac{y^2}{y-1}$$

und wenn ihr die Reduction, wie vorhin, anstellet, so findet ihr endlich $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, oder $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Weil $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ größer ist als $\frac{1}{2}$; so findet bloß die erstere Wurzel statt. Derowegen, weil diese allein mit $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, nicht aber mit $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$; hingegen die falsche Wurzel $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ mit $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ die Probe hält; so sind die verlangten Zahlen $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Probe: Denn $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}=2+\sqrt{5}$, und $(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})=2+\sqrt{5}$, imgleichen $\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{5}+\frac{5}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{5}{4}=2+\sqrt{5}$. Gleichergestalt ist $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}=2-\sqrt{5}$, und $(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5})=2-\sqrt{5}$, imgleichen $\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\sqrt{5}+\frac{5}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{5}{4}=2-\sqrt{5}$.

Die 25. Aufgabe.

86. Aus dem gegebenen Producte zwoer Größen und ihrer Differenz die Größen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey das Product $=a$, die größte Größe $=x$,
die Differenz $=b$, die andere $=y$;

So ist:

$$\frac{a = xy}{a:y=x,} \qquad \frac{b=x-y}{b+y=x.}$$

Folglich

Folglich $a:y = b + y$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; y$$

$$a = by + y^2$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 \quad \tfrac{1}{4}b^2 \; (\S.\ 83.).$$

$$a + \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + by + y^2$$

$$\sqrt{(a + \tfrac{1}{4}b^2)} = \tfrac{1}{2}b + y$$

$$\sqrt{(a + \tfrac{1}{4}b^2)} - \tfrac{1}{2}b = y.$$

Es sey $a=40$, $b=3$, so ist $y=\sqrt{(40+\tfrac{9}{4})} - \tfrac{3}{2} = \sqrt{(169:4)} - \tfrac{3}{2} = \tfrac{13}{2} - \tfrac{3}{2} = \tfrac{10}{2} = 5$, und demnach $x=8$.

Probe: Denn $5 \cdot 8 = 40$, und $8 - 5 = 3$.

Die 26. Aufgabe.

87. Die Natur der dritten Dignität einer binomischen Wurzel zu finden.

Auflösung.

Ihr habt nur die andere Dignität,

$$a^2 + 2ab + b^2$$

durch die Wurzel $a + b$ zu multipliciren (§. 32.)

$$+ a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$a^3 + 2a^2b + ab^2$$

so ist $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ die verlangte dritte Dignität (§. 78.).

Lehrsatz.

Die dritte Dignität einer binomischen Wurzel enthält in sich die dritte Dignität der beyden Theile (a^3 und b^3) und ein Product aus dem Quadrate des ersten Theiles dreymal genommen ($3a^2$) in den andern (b), nebst noch einem andern Producte aus dem ersten Theile dreymal genommen ($3a$) in das Quadrat des andern Theils (b^2).

Die

Die 1 Anmerkung.

88. Ihr habt hier abermal auf eine sehr leichte Art den 3 Lehrsatz der Rechenkunst (§ 99. *Arithm.*) gefunden, woraus die Ausziehung der Cubicwurzel hergeleitet worden ist (§. 103. *Arithm.*). Wenn ihr aber die dort gegebenen Regeln vergessen hättet, so könnte euch das allgemeine Exempel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ an deren statt dienen. Denn ihr sehet, daß, wenn ihr in der ersten Classe zur Linken die daselbst befindliche dritte Dignität a^3 abziehet, ihr den ersten Theil der Wurzel a habt. Wenn ihr nun aus den übrigen Gliedern den andern Theil finden wollet, so müsset ihr das erste zur Linken $3a^2b$ durch das Quadrat des ersten dreymal genommen ($3a^2$) dividiren, und hernach nicht allein das Product aus diesem Divisore ($3a^2$) in den neuen Quotienten (b), sondern das Product aus dem Quadrate des neuen Quotienten (b^2) in den vorhergehenden dreymal genommen ($3a$), und endlich die dritte Dignität des neuen Quotienten (b^3) abziehen.

Zusatz.

89. Setzet $a = a + b$, und $b = c$, so kommt für die dritte Dignität der trinomischen Wurzel $a + b + c$ heraus $(a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$, und also müsset ihr zu der Dignität der binomischen Wurzel noch das Product aus dem Quadrate der binomischen Wurzel dreymal genommen $3(a + b)^2$ in den dritten Theil c, das Product aus der binomischen Wurzel dreymal genommen $3(a + b)$ in das Quadrat des dritten Theils c^2, und die dritte Dignität desselben Theils c^3 addiren. Setzet $a = a + b + c$, und $b = d$, so ist die dritte Dignität der quadrinomischen Wurzel $(a + b + c)^3 + 3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3$; folglich müsset ihr noch zu der Dignität der trinomischen Wurzel $(a + b + c)^3$ das Product aus dem Quadrate der trinomischen Wurzel dreymal genommen $3(a + b + c)^2$ in den vierten Theil d, das Product aus der trinomischen Wurzel

zel

zel dreymal genommen $3(a+b+c)$ in das Quadrat des vierten Theils d^2, und die dritte Dignität des vierten Theils d^3 addiren. Solchergestalt sehet ihr, daß ihr nach der binomischen Regel auch die dritte Dignität einer jeden polynomischen Wurzel finden, imgleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede polynomische Cubicwurzel ziehen könnet. Denn $(a+b+c+d+e \text{ \&c.})^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3+3(a+b+c+d)^2e+3(a+b+c+d)e^2+e^3$ u. s. w. unendlich fort.

Die 2. Anmerkung.

90. Auf eben solche Weise könnet ihr für die höhern Dignitäten Regeln finden. Und unerachtet ich in der folgenden Aufgabe zeigen werde, wie ihr anstatt unendlicher Regeln für unendliche Dignitäten, zu welchen eine Größe erhoben werden kann, eine einige finden könnet; so wird euch die Mühe doch nicht verdrießen, wenn ihr auf gleiche Art die Natur der vierten, fünften, sechsten Dignität u. s. w. untersuchet. Denn diese Untersuchung selbst wird euch dienen, die allgemeine Regel zu erfinden.

Die 27. Aufgabe.

91. **Eine allgemeine Regel zu finden, nach welcher jede binomische Wurzel zu jeder verlangten Dignität erhoben werden kann.**

Auflösung.

Wenn ihr die binomische Wurzel nach und nach zu ihren Dignitäten erhebet, wie beygefügte Tafel ausweiset.

$1a$	$1b$									
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$								
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$							
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$						
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$					
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$				
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$			
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$		
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

so

so werdet ihr wahrnehmen, daß eine jede Dignität aus verschiedenen Producten zusammen gesetzt ist, und diese Producte durch verschiedene Zahlen multiplicirt werden. Es entstehen aber diese Producte, wenn ihr jeden Theil der Wurzel zu allen niedrigern Dignitäten als die gegebene ist, erhebet, und sie verkehrt in einander multipliciret. Z. E. in der sechsten Dignität sind alle Dignitäten von 1 bis zu der sechsten der beyden Theile $a^6.a^5.a^4.a^3.a^2.a1.$ und $1b.b^2.b^3.b^4.b^5.b^6$. Multipliciret die erstere Reihe in die andere, so bekommet ihr $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$, das ist, alle Producte, woraus die sechste Dignität besteht, ausser denen Zahlen, welche sie multipliciren, und nach dem Exempel des *Oughtred* (Clavis Mathematicæ c. 12. §. 6. p. m. 38.) sonderlich von den Engelländern Unciæ genennet werden. Derowegen, wenn der Exponent m ist, so sind die Producte $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5 + a^{m-6}b^6$ u. s. w. unendlich fort.

Die Unzen 1 + 1
1 + 2 + 1
1 + 3 + 3 + 1
1 + 4 + 6 + 4 + 1
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1
1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1
1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 &c.

werden gefunden, wenn ihr die Exponenten der Dignitäten, welche in einander multiplicirt werden, unter einander schreibet, und den Bruch aus den zwoen ersten Zahlen für die Unze des andern Gliedes, den Bruch aus den beyden ersten obern und beyden ersten untern Zahlen zur Unze des

dritten

dritten Gliedes nehmet ꝛc. Z. E. Es sollen die Unzen für die sechste Dignität gefunden werden: so schreibet die angeführten Exponenten dergestalt unter einander:

$$\begin{matrix} 6. & 5. & 4. & 3. & 2. & 1. \\ 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. \end{matrix}$$

Alsdenn ist $\frac{6}{1}=6$ die Unze des andern Gliedes, $\frac{6.5}{1.2}=15$ die Unze des dritten, $\frac{6.5.4}{1.2.3}=20$, die Unze des vierten, $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}=15$ die Unze des fünften, $\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}=6$ die Unze des sechsten, und endlich $\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}=1$ die Unze des letzten Gliedes.

Auf eben solche Art werden die Unzen gefunden, wenn die Exponenten undeterminirt sind. Man schreibt sie nämlich dergestalt unter einander:

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.\ \text{ꝛc.}}{1.2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.}$$

und nimmt $\frac{m}{1}$ für die Unze des andern Gliedes; $\frac{m.m-1}{1.2.}$ für die Unze des dritten, $\frac{m.m-1.m-2.}{1.2.\quad 3.}$ für die Unze des vierten, $\frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.\quad 3.\quad 4.}$ für die Unze des fünften $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.}{1.2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.}$

für die Unze des sechsten, und alsdenn ferner $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.}{1.2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.}$ für die Unze des siebenten ꝛc.

Wenn ihr nun diese Uncias in die oben gefundenen Producte multipliciret; so bekommet ihr für die Dignität m von $a+b$.

$$a^m + \frac{m}{1.}a^{m-1}b + \frac{m.m-1.}{1.2.}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.\quad 3.}a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.\quad 3.\quad 4.}a^{m-4}b^4 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.}{1.2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.}a^{m-5}b^5 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.}{1.2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.}a^{m-6}b^6 \text{ \&c.}$$

Das ist, weil $a^{m-1}=a^m:a$, $a^{m-2}=a^m:a^2$, $a^{m-3}=a^m:a^3$, $a^{m-4}=a^m:a^4$ &c. (§. 39.),

$$a^m + \frac{ma^mb}{1a} + \frac{m.m-1a^mb^2}{1.2.\quad a^2} + \frac{m.m-1.m-2.a^mb^3}{1.2.\quad 3.\quad a^3} + \frac{m.m-1.m-2.m=3.a^mb^4}{1.2.\quad 3.\quad 4.\quad a^4} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.a^mb^5}{1.2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad a^5} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.a^mb^6}{1.2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.\quad a^6} \text{ \&c.}$$

Wenn ihr nun ferner $a=P$ und $b:a=Q$, das erste Glied $=A$, das andere $=B$, das dritte $=C$, das vierte $=D$, das fünfte $=E$ u. s. w. setzet; so findet ihr endlich $(P+PQ)^m = P^m + m.AQ + \frac{m-1BQ}{2.}$

+m

$+\frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5}EQ + \frac{m-5}{6}FQ$

u. s. w. unendlich fort.

Also habt ihr eine allgemeine Regel gefunden, nach welcher ihr eine jede binomische Wurzel zu einer jeden verlangten Dignität erheben könnet.

Die 1. Anmerkung.

92. Ihr verlanget die vierte Dignität von 18 oder $10+8$, so ist $m=4$, $P=10$, $Q=8:10=4:5$,

Folglich $P^m=10^4=10000=A.$

$$m.AQ=4.10000.\tfrac{4}{5}=32000=B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ=\tfrac{3}{2}.32000.\tfrac{4}{5}=38400=C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ=\tfrac{2}{3}.38400.\tfrac{4}{5}=20480=D$$

$$\frac{m-3}{4}DQ=\tfrac{1}{4}.20480.\tfrac{4}{5}=4096=E$$

$$\frac{m-4}{5}EQ=0.\ 4096.\tfrac{4}{5}=0=F$$

10000=	A
32000=	B
38400=	C
20480=	D
4096=	E
104976	vierte Dignität von 18.

Die 2. Anmerkung.

93. Ihr werdet vielleicht meinen, daß man mit leichter Mühe durch das gewöhnliche Multipliciren die gegebe-

nen Zahlen zu der verlangten Dignität erheben kann, und dannenhero die gefundene allgemeine Regel für unnütz halten. Allein, ihr sollet zu seiner Zeit erfahren, wie sehr ihr euch in eurer Meinung betrogen habt, wenn ihr ihren vielfältigen Nutzen verspüren werdet. Jetzt erinnere ich nur dieses. Wenn ihr aus einer gegebenen Zahl eine verlangte Wurzel ziehen sollet; so könnet ihr die Regeln, nach welchen solches geschiehet, wie für die Quadrat- und Cubicwurzel (§. 80. 88.) finden, wenn ihr durch die gefundene allgemeine Regel die binomische Wurzel $a+b$ zu der gehörigen Dignität erhebet. Z. E. Ihr sollet die Wurzel der fünften Dignität aus einer gegebenen Zahl ziehen; so dürfet ihr nur $a+b$ zu der fünften Dignität erheben. Das allgemeine Exempel wird euch die Regel bald an die Hand geben.

Die 3. Anmerkung.

94. Gleichwie ihr aber schon oben gesehen habt, daß die Regeln für die binomischen Wurzeln auch dienen, eine polynomische Wurzel zu der andern und dritten Dignität zu erheben (§. 81. 89.); also gehet es auch an, daß ihr nach dieser allgemeinen Regel, welche zwar eigentlich auch nur auf binomische Wurzeln gerichtet ist, auf eine gleiche Weise eine jede polynomische Wurzel zu der verlangten Dignität erhebet, und die Wurzel selbst nach derselben findet: wie aus folgender Aufgabe zu ersehen ist.

Die 28. Aufgabe.

95. **Eine allgemeine Regel zu finden, aus allen Dignitäten eine verlangte binomische Wurzel zu ziehen.**

Auflösung.

Weil $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 42.); so ist das Wurzelausziehen so viel, als eine Größe zu einer Dignität erheben, welche zu ihrem Exponenten eine gebrochene Zahl hat. Derowegen, wenn ihr in der vorhin gefundenen Regel anstat des Exponenten m

den

den Exponenten $m:n$ setzet, so bekommet ihr eine allgemeine Regel, nach welcher sowohl jede Größe zu einer verlangten Dignität erhoben, als aus derselben eine verlangte Wurzel gezogen werden kann.

Es ist aber folgende:

$$\sqrt[n]{(P+PQ)^m} = P^{m:n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ$$

$$+ \frac{m-3n}{4n}DQ + \frac{m-4n}{5n}EQ + \frac{m-5n}{6n}FQ$$ u. s. w. unendlich fort.

Die 1. Anmerkung.

96. Diese sehr nützliche Regel hat der vortrefliche Geometra in Engelland, *Isaac Newton*, zuerst gefunden, wiewohl auf eine andere Art, als ich gewiesen habe: wie solches aus dem Briefe erhellet, welchen er An. 1676. an den unvergleichlichen Mathematicum und Polyhistorem, den Herrn Reichshofrath von Leibnitz, geschrieben, und *Wallisius* mit in den dritten Theil seiner mathematischen Werke f. 622. hat drucken lassen. Es ist aber diese Regel einerley mit der vorigen. Denn, wie ihr m:n durch ganze Zahlen in dem Gebrauche derselben erklären könnet, wenn ihr n=1 setzet: so könnet ihr auch in der vorigen Regel m durch einen Bruch erklären, wenn eine Wurzel ausgezogen werden soll. Z. E. Ihr setzet $m=\frac{1}{2}$, wenn ihr die Quadratwurzel verlanget; $m=\frac{1}{3}$, wenn ihr die Cubicwurzel suchet u. s. w.

Die 2. Anmerkung.

97. Damit ihr aber den Gebrauch der Regel deutlich erkennen möget: so will ich selbige mit einem Exempel erläutern. Ihr verlanget zu wissen die Quadratwurzel aus $aa-x^2$: so ist $m=1$, $n=2$, $P=a^2$, $Q=-x^2:a^2$, folglich:

$$P^{m:n} = a = A$$

$$+\frac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2}a - x^2 : a^2 = -\frac{x^2}{2a} = B$$

$$+\frac{m-n}{2n}BQ = \frac{1-2}{4} - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^2}{a^2} = -\frac{x^4}{8a^3} = C$$

$$+\frac{m-2n}{3n}CQ = \frac{1-4}{6} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^2}{a^2} = -\frac{x^6}{16a^5} = D$$

$$+\frac{m-3n}{4n}DQ = \frac{1-6}{8} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{x^2}{a^2} = -\frac{5x^8}{128a^7} = E$$

$$+\frac{m-4n}{5n}EQ = \frac{1-8}{10} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{x^2}{a^2} = -\frac{7x^{10}}{256a^9} \text{ \&c.}$$

Demnach ist $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$ $- \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ u. s. w. unendlich fort.

Die 3. Anmerkung.

98. Wenn man aus der gegebenen Größe eine vollkommene Wurzel haben kann, so ist die Zahl der Glieder allezeit endlich. Hingegen wo dergleichen nicht vorhanden ist, so gehen die Glieder unendlich fort. Man nimmt aber von denselben so viele in jedem Falle als nöthig ist, bis nämlich durch Weglassung der übrigen kein merklicher Fehler entstehet.

Die 4. Anmerkung.

99. Wenn einem die 27. und 28. Aufgabe zu schwer vorkommen sollte, der kann sie so lange bey Seite setzen, bis wir unten ihrer nöthig haben werden.

Die

Die 29. Aufgabe.

100. Die Differenz zweyer Quadrate zu finden, derer Wurzeln um 1 unterschieden sind.

Auflösung.

Es sey die eine Wurzel n, die andere	$n+1$,
so ist das Quadrat der größern	n^2+2n+1,
——— der kleinern	n^2
die Differenz	$2n+1$.

Wenn nun jede Zahl, zweymal genommen, eine gerade Zahl bringet, und eine gerade Zahl von einer ungeraden um 1 unterschieden ist; so ist die Differenz zweyer Quadrate, derer Wurzeln um 1 unterschieden sind, eine ungerade Zahl, welche der Summe der Wurzeln gleich ist. Es seyn die Wurzeln 8 und 9, so ist die Differenz ihrer Quadrate $17=8+9$.

Der 1. Zusatz.

101. Also kann man durch bloße Addition die Quadratzahlen aller Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung finden. Man darf nämlich nur zu dem vorhergehenden Quadrate beständig seine und zugleich die folgende Wurzel addiren.

Der 2. Zusatz.

102. Die Quadratzahlen werden auch in ihrer Ordnung nach einander gefunden, wenn man die ungeraden Zahlen in ihrer Ordnung zu einander addiret.

Wurzeln.	ungerade Zahlen.	Quadratzahl.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

Die 30. Aufgabe.

103. **Den Unterscheid zwoer Cubiczahlen zu finden, derer Wurzeln um 1 von einander unterschieden sind.**

Auflösung.

Es sey die eine Wurzel $=n$, die andere $n+1$; so ist die größere Cubiczahl n^3+3n^2+3n+1
die kleinere n^3

der Unterscheid $3n^2+3n+1$.

Das ist, $n^2+2n+1+2n^2+n=(n+1)^2+2n^2+n$. Also ist der verlangte Unterscheid die Summe aus dem Quadrate der größern Wurzel, dem Quadrate der kleinern zweymal genommen, und der kleinern Wurzel. Z. E. Es seyn die Wurzeln 8 und 9; so ist der Unterscheid ihrer Cubiczahlen $217=81+128+8=9^2+2.8^2+8$.

Setzet

Setzet ferner die dritte Wurzel $n+2$; so ist die

Cubiczahl	$n^3+6n^2+12n+8$
Die vorige	n^3+3n^2+3n+1
Der Unterscheid	$3n^2+9n+7$
Der erste Unterscheid	$3n^2+3n+1$

Der andere Unterscheid $6n+6=6(n+1)$.

Also ist der andere Unterscheid zwoer Cubiczahlen die Wurzel der kleinern 6 mal genommen.

Zusatz.

104. Wenn man also die Quadratzahlen in ihrer Ordnung nach einander gefunden hat (§. 101. 102.); so kann man daraus die Cubiczahlen durch bloße Addition finden aus dem ersten Unterscheide. Oder, wenn man die Cubiczahlen ohne die Quadratzahlen finden will; so addirt man erstlich den andern Unterscheid 1.6.12.18.24.30. ꝛc. um den erstern zu finden, und darnach den erstern Unterscheid um die Cubiczahlen zu erhalten, wie aus dem beygesetzten Täflein abzunehmen ist.

Wurzeln.	anderer Unterscheid.	erster Unterscheid.	Cubiczahlen.
1	1	1	1
2	6	7	8
3	12	19	27
4	18	37	64
5	24	61	125
6	30	91	216
7	36	127	343
8	42	169	512
9	48	217	729
10	54	271	1000

Die 31. Aufgabe.

105. Zu finden, was für eine Zahl herauskommt, wenn man eine gerade Zahl zu einer ungeraden addiret, oder sie von einander abziehet, oder auch durch einander multiplicirt.

Auflösung.

Weil eine gerade Zahl sich in zween gleiche Theile theilen läßt, eine ungerade aber um 1 von einer geraden unterschieden ist; so nennet die gerade Zahl $2x$, die ungerade $2y+1$

$$\begin{array}{r} 2y+1 \\ 2x \\ \hline \text{Sum. } 2x+2y+1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2y+1 \\ 2x \\ \hline \text{Diff. } 2y+1-2x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2y+1 \\ 2x \\ \hline \text{Prod. } 4xy+2x \end{array}$$

Die Summe und Differenz sind ungerade Zahlen, das Product ist eine gerade Zahl. Denn dieses läßt sich halbiren, jene nicht.

Die 32. Aufgabe.

106. Zu finden, was für eine Zahl heraus kommt, wenn man eine gerade Zahl zu einer geraden addirt, oder sie von einander subtrahirt, oder auch durch einander multiplicirt.

Auflösung.

Es sey die eine gerade Zahl $2x$, die andere $2y$. So ist die Summe $2x+2y$, die Differenz $2x-2y$, das Product $4xy$: und also sind alle drey gerade Zahlen, denn sie lassen sich halbiren.

Die 33. Aufgabe.

107. Zu finden, was für Zahlen heraus kommen, wenn ihr eine ungerade Zahl zu einer ungeraden addiret, oder sie von einander subtrahiret, oder auch durch einander multipliciret.

Auflösung.

Es sey die eine ungerade Zahl $2x+1$, die andere $2y+1$.

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ 2y+1 \\ \hline \text{Summe} = 2x+2y+2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x+1 \\ 2y+1 \\ \hline \text{Differ.} = 2x-2y \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ 2y+1 \\ \hline +2x+1 \\ 4xy+2y \quad \\ \hline \text{Product} = 4xy+2x+2y+1. \end{array}$$

Die Summe und Differenz lassen sich halbiren, sind also gerade Zahlen. Das Product läßt sich nicht halbiren: ist also eine ungerade Zahl.

Die 34. Aufgabe.

108. Zu finden, was für Zahlen heraus kommen, wenn ihr lauter gerade Zahlen, oder eine gerade Anzahl ungerader Zahlen, oder auch eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen addiret.

Auflösung.

Es seyn die geraden Zahlen $2x$, $2y$, $2z$, $2t$ u. s. w. so ist die Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. das ist $2(x+y+z+t$ rc.) also eine gerade Zahl. Derowegen die Summe von lauter geraden Zahlen ist eine gerade Zahl.

Es

Es seyn die ungeraden Zahlen $2x+1$, $2y+1$, $2z+1$, $2t+1$, u. s. w. ihre Anzahl $2m$. So ist ihre Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. $+2m$, das ist $2(x+y+z+t$ rc.$)+2m$, folglich eine gerade Zahl. Derowegen wenn lauter ungerade Zahlen in gerader Anzahl zusammen addirt werden, so ist die Summe eine gerade Zahl.

Es seyn die ungeraden Zahlen abermals $2x+1$, $2y+1$, $2z+1$, $2t+1$ u. s. w. ihre Anzahl $2m+1$. So ist ihre Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. $+2m+1$, das ist, $2(x+y+z+t$ rc.$)+2m+1$, folglich eine ungerade Zahl. Derowegen, wenn lauter ungerade Zahlen in ungerader Anzahl zusammen addiret werden, so ist die Summe eine ungerade Zahl.

Anmerkung.

109. Wenn diese Aufgaben gleich sonst keinen Nutzen hätten, so sollten sie euch doch angenehm seyn, weil sie euch eine neue Maxime der Benennung an die Hand geben. Ihr werdet auch bey andern Gelegenheiten ihren Nutzen verspüren. Z. E. Wenn einer verlanget, ihr solltet 20 in 5 ungerade Zahlen theilen; so werdet ihr bald sehen, daß dieses unmöglich sey, weil ungerade Zahlen in ungerader Anzahl eine ungerade Zahl bringen, wenn sie summiret werden.

Die 35. Aufgabe.

110. Zu finden, was für eine Dignität herauskommt, wenn man eine Quadrat- oder Cubiczahl durch sich selbst multiplicirt.

Auflösung.

Es sey die Quadratzahl x^2, die Cubiczahl x^3. Multipliciret jede durch sich selbst, so kommt in dem erstern Falle x^4, in dem andern x^6. Weil der Exponent 4 sich durch 2, der Exponent 6 aber

sowohl

sowohl durch 2 als durch 3 sich dividiren läßt; so ist x^4 ein Quadrat, x^6 aber zugleich eine Quadrat- und eine Cubiczahl. Derowegen, wenn eine Quadratzahl durch sich selbst multiplicirt wird, so ist das Product eine vierte Dignität und Quadratzahl: wenn eine Cubiczahl durch sich selbst multiplicirt wird, so ist das Product zugleich eine Quadrat- und auch eine Cubiczahl.

Anmerkung.

111. Auf diese Manier könnet ihr noch gar viel andere dergleichen Lehrsätze finden, wenn ihr dieselben nöthig habt.

Die 36. Aufgabe.

112. Zu finden, wie groß in einer arithmetischen Progression die Summe der beyden äussersten Glieder sey.

Auflösung.

Es sey das erste Glied a, der Unterscheid der Glieder d, so ist die Progression (§. 69. *Arithm.*).

$$a,\ a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\quad a+4d,\quad a+5d,$$

$$\frac{\begin{array}{r} a+5d \\ a \end{array}}{2a+5d} = \frac{\begin{array}{r} a+3d \\ a+2d \end{array}}{2a+5d} = \frac{\begin{array}{r} a+d \\ a+4d \end{array}}{2a+5d}$$

$$a,\ a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\quad a+4d,$$

$$\frac{\begin{array}{r} a+4d \\ a \end{array}}{2a+4d} = \frac{\begin{array}{r} a+2d \\ \cdot 2 \end{array}}{2a+4d.} = \frac{\begin{array}{r} a+d \\ a+3d. \end{array}}{2a+4d.}$$

Lehrsatz.

In einer arithmetischen Progreßion ist die Summe der beyden äussersten Glieder der Summe jeder zweyen Glieder gleich, welche von den äussersten gleich weit abstehen: imgleichen zweymal so groß als das mittlere, wenn die Glieder an der Zahl ungleich sind.

Z. E.

Z. E.	3	6	9	12	15	18	21
				12	9	6	3
				24 =	24 =	24 =	24.

Der 1. Zusatz.

113. Derowegen bekommet ihr die Summe der ganzen Progression, wenn ihr die Summe des ersten und letzten Gliedes durch die halbe Zahl der Glieder multipliciret. Es sey das erste Glied a, die Differenz d, die Zahl der Glieder n, so ist das letzte Glied $a+(n-1)d$, folglich die Summe der Progression $(2a+(n-1)d)\frac{1}{2}n = an+(n^2-n)\frac{1}{2}d$. Es sey z. E. $a=3$, $n=7$, $d=3$, so ist die Summe der Progreßion $21+(49-7)\frac{3}{2}=21+42.\frac{3}{2}=21+21.3$ $=21+63=84$.

Der 2. Zusatz.

114. Ihr könnet demnach die Summe einer arithmetischen Progression finden, wenn euch das erste Glied, der Unterscheid und die Zahl der Glieder gegeben sind.

Der 3. Zusatz.

115. Es sey $a=1$, $d=2$, die Zahl der Glieder $=n$; so ist die Summe der Progression $n+n^2-n=n^2$: woraus von neuem erhellet, daß die Quadratzahlen herauskommen, wenn man die ungeraden Zahlen, das ist, die Glieder in der arithmetischen Progreßion 1, 3, 5, 7, 9, 11 u.s.w. zusammen addirt.

Der 4. Zusatz.

116. Es sey $a=\frac{1}{2}d$, das ist, das erste Glied sey dem halben Unterscheide der Glieder gleich; so ist die Summe der Progreßion $an+an^2-an=an^2$.

Der

Der 5. Zusatz.

117. Es sey $a = n = \frac{1}{2}d$ das ist, das erste Glied, die Anzahl der Glieder und der halbe Unterscheid der Glieder sind einander gleich; so ist die Summe $n^2 + n^3 - n^2 = n^3$, das ist der Cubus von dem ersten Gliede. Z. E. $a = n = \frac{1}{2}d = 8$, oder die Progreßion 8, 24, 40, 56, 72, 88, 104, 120; so ist die Summe 512 oder die Cubiczahl von 8.

Anmerkung.

118. Hieraus erhellet, wie man aus allgemeinen Lehrsätzen besondere finden kann.

Die 37. Aufgabe.

119. Aus dem ersten und letzten Gliede einer arithmetischen Progreßion und dem Unterscheide der Glieder, ihre Zahl und die Summe der Progression zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$, die Zahl der Glieder $= x$,
das letzte $= b$, die Summe $= y$,
der Unterscheid $= d$;

So ist (§. 113.)

$$b = a + dx - d$$

$$b - a + d = dx$$

$$\frac{b - a}{d} + 1 = x$$

$$y = \frac{1}{2}(b + a)x$$

$$= \frac{(b + a)(b - a)}{2d} + \frac{1}{2}(b + a)$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2d} + \frac{b + a}{2}.$$

Es

Es sey z. E. $a=2$, $b=17$, $d=3$, so ist $x=(17-2):3+1=15:3+1=6$, und $y=\frac{1}{2}(17+2)+(289-4):6=\frac{19}{2}+\frac{285}{6}=9\frac{1}{2}+47\frac{1}{2}=57$.

Probe: Denn $a+dx-d=2+3.6-3=2+18-3=2+15=17$, und $\frac{1}{2}(b+a)x=\frac{6}{2}(17+2)=3.\ 19=57$.

Die 38. Aufgabe.

120. Aus dem ersten Gliede, dem Unterscheide der Glieder, und der Summe einer arithmetischen Progreßion, die Zahl der Glieder und das letzte Glied zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $=a$, der Unterscheid $=d$, die Summe $=c$; die Zahl der Glieder $=x$, das letzte Glied $=y$,

So ist (§. 113.)

$$\tfrac{1}{2}x(a+y)=c \qquad a+dx-d=y$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; 2$$

$$ax+xy=2c$$

$$\overline{\qquad\qquad}$$

$$xy=2c-ax$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; x$$

$y=(2c-ax):x$, folglich:

$$(2c-ax):x=a+dx-d$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; x$$

$$2c-ax=dx^2+ax-dx$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; d$$

$$2c:d=x^2+(2a-d)x.$$

$$\overline{\qquad\qquad}$$

$$d$$

Setzet

Setzet $(2a-d):d=m$, so ist

$$\begin{array}{l} 2c:d=x^2+mx \\ \quad\frac{1}{4}m^2 \qquad \frac{1}{4}m^2 \ (\S.\ 83.) \\ \hline \frac{1}{4}m^2+2c:d=x^2+mx+\frac{1}{4}m^2 \\ \hline \sqrt{(\frac{1}{4}m^2+2c:d)}=\frac{1}{2}m+x \\ \hline \sqrt{(\frac{1}{4}m^2+2c:d)}-\frac{1}{2}m=x. \end{array}$$

Oder $x=\sqrt{\left(\frac{4a^2-4ad+d^2}{4d^2}+\frac{2c}{d}\right)}-\frac{2a+d}{2d}$

folglich

$$\begin{aligned} y&=\sqrt{(2cd+a^2-ad+\tfrac{1}{4}d^2)}-\tfrac{1}{2}d \\ &=\sqrt{(2cd+(a-\tfrac{1}{2}d)^2)}-\tfrac{1}{2}d. \end{aligned}$$

Es sey $a=2$, $d=3$, $c=57$, so ist $m=(4-3):3=\frac{1}{3}$, folglich $x=\sqrt{(\frac{1}{36}+\frac{114}{3})}-\frac{1}{6}=\sqrt{\frac{1369}{36}}-\frac{1}{6}=\frac{37}{6}-\frac{1}{6}=\frac{36}{6}=6$. Ferner ist $y=(\sqrt{342+\frac{1}{4}})-1\frac{1}{2}=18\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}=17$.

Probe: Denn $(2+17)3=19.3=57$, und $2+3.6-3=2+18-3=17$.

Die 39. Aufgabe.

121. Aus dem ersten und letzten Gliede und der Summe einer arithmetischen Progression, die Zahl und den Unterscheid der Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $=a$,
das letzte $=b$,
die Summe $=c$.

die Zahl der Glieder $=x$,
der Untersch. $=y$,

So ist (§. 113.)

$$\tfrac{1}{2}x(a+b)=c \quad | \cdot 2$$
$$x(a+b)=2c$$
$$x=2c:(a+b)$$

$$a+xy-y=b$$
$$xy-y=b-a$$
$$xy=b+y-a$$
$$x=(b+y-a):y.$$

Folglich:

$$2c:(a+b)=(b+y-a):y \quad | \cdot y$$
$$2cy:(a+b)=b+y-a \quad | \cdot (a+b)$$
$$2cy=ab+ay-a^2+b^2+by-ab$$
$$2cy-ay-by=b^2-a^2 \quad | : (2c-a-b)$$
$$y=(b^2-a^2):(2c-a-b).$$

Es sey $a=2$, $b=17$, $c=57$, so ist $x=114:(2+17)=114:19=6$, und $y=(289-4):(114-19)=285:95=3$.

Probe: Denn $3(2+17)=3.19=57$, und $2+3.6-3=2+18-3=17$, wie vorhin (§. 120.).

Die 40. Aufgabe.

122. Aus dem Unterscheide und der Zahl der Glieder, imgleichen der Summe einer arithmetischen Progression, das erste und letzte Glied, und folglich alle übrigen zu finden.

Auflösung.

Es sey die Zahl der Glieder $=n$, das erste Glied $=x$,
der Unterscheid $=d$, das letzte $=y$.
die Summe $=c$,

So ist (§. 113.).

$$\tfrac{1}{2}n(x+y)=c \quad \text{(mit } 2\text{)}$$
$$n(x+y)=2c \quad \text{(durch } n\text{)}$$
$$x+y=2c:n$$
$$y=2c:n-x.$$

$$y=x+nd-d$$

Folglich:

$$2c:n-x=x+nd-d$$
$$2c:n+d-nd=2x$$
$$c:n+\tfrac{1}{2}(d-nd)=x.$$

Es sey $n=6$, $d=3$, $c=57$, so ist $x=\frac{57}{6}+\frac{3-18}{2}=\frac{57}{6}+9-9=\frac{66}{6}-9=11-9=2$, und $y=\frac{114}{6}-2=19-2=17$.

Die Probe ist wie vorhin (§. 120.).

Die 41. Aufgabe.

123. Aus dem Unterscheide der Glieder, dem letzten Gliede und der Summe einer arithmetischen Progression, das erste Glied und die Zahl der Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das letzte Glied $=b$, der Unterscheid $=d$, die Summe $=c$, das erste Glied $=x$, die Zahl der Glieder $=y$,

So ist (§. 113.)

$$\tfrac{1}{2}y(x+b)=c$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ 2$$

$$y(x+b)=2c$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ y$$

$$x+b=2c:y$$

$$x=\frac{2c}{y}-b,$$

$$b=x+dy-d$$

$$b+d-dy=x.$$

Folglich:

$$\frac{2c}{y}-b=b+d-dy$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ y$$

$$2c-by=by+dy-dy^2$$

$$dy^2-2by-dy=-2c$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ d$$

$$y^2-\frac{(2b+d)}{d}y=-2c:d.$$

Setzet $(2b+d):d=m$, so ist

$$y^2 - my = -2c:d$$
$$\tfrac{1}{4}m^2 \qquad \tfrac{1}{4}m^2 \text{ (§. 83.)}$$
$$y^2 - my + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 - 2c:d$$

$\tfrac{1}{2}m - y$ oder $y - \tfrac{1}{2}m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - 2c:d)}$

$$y = \tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - 2c:d)}$$
$$y = \frac{2b+d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{4b^2+4bd+d^2}{4d^2} - \frac{2c}{d}\right)}$$
$$= \frac{2b+d \pm \sqrt{(4b^2+4bd+d^2-8cd)}}{2d}$$

Folglich:

$$x = b+d-b-\tfrac{1}{2}d \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(4b^2+4bd+d^2-8cd)}$$
$$= \tfrac{1}{2}d \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(4b^2+4bd+d^2-8cd)}$$

Es ist aber $4b^2+4bd+d^2=(2b+d)^2$.

Es sey $b=17$, $d=3$, $c=57$, so ist $2b+d=34+3=37$, folglich $y = \frac{37-\sqrt{(1369-1368)}}{6} = \frac{37-1}{6} = \frac{36}{6} = 6$, und $x = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{2} = 2$.

Die Probe ist wie vorhin (§: 120.).

Die 42. Aufgabe.

124. Aus der Summe einer arithmetischen Progression, der Zahl der Glieder und dem Producte aus dem ersten Gliede in das letzte, die Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das Product $=a$, das erste Glied $=x$,
die Zahl der Glieder $=n$, das letzte $=y$,
die Summe $=c$.

So ist

$\frac{1}{2}n(x+y)=c$ (§. 113.) $\quad$ $a=xy$

$\overline{\qquad\qquad\qquad}\ 2$ $\qquad$ $\overline{\qquad}\ x$

$n(x+y)=2c$ $\qquad$ $a:x=y.$

$\overline{\qquad\qquad}\ n$

$(x+y)=2c:n$

$\overline{\qquad\qquad}$

$y=\frac{2c}{n}-x.$

Folglich:

$a:x=2c:n-x$

$\overline{\qquad\qquad}\ x$

$a=\frac{2cx}{n}-x^2$

$\overline{\qquad\qquad}$

$x^2-\frac{2cx}{n}=-a$

$c^2:n^2 \qquad c^2:n^2$

$\overline{\qquad\qquad}$

$x^2-\frac{2cx}{n}+c^2:n^2=c^2:n^2-a$

$\overline{\qquad\qquad\qquad}$

$\pm\frac{c}{n}\mp x=\sqrt{\left(\frac{c^2}{n^2}-a\right)}$

$\overline{\qquad\qquad\qquad}$

$\frac{c}{n}\pm\sqrt{\left(\frac{c^2}{n^2}-a\right)}=x.$

Nämlich

Nämlich wenn man das Zeichen — braucht, so bekommt man x; wenn man das Zeichen $+$ brauchet, so bekommt man y.

Es sey $c=57$, $n=6$, $a=34$, so ist $x=\frac{57}{6}-\sqrt{\left(\frac{3249}{36}-34\right)}=\frac{57}{6}-\sqrt{\left(\frac{3249-1224}{36}\right)}=\frac{57}{6}-\sqrt{\frac{2025}{36}}=\frac{57}{6}-\frac{45}{6}=\frac{12}{6}=2$, und hingegen $y=\frac{57+45}{6}=\frac{102}{6}=17$.

Probe: Denn $\frac{6}{2}(2+17)=3.19=57$, und $2.17=34$.

Die 8. Erklärung.

125. Wenn man etliche Glieder von einer arithmetischen Progression, welche sich von 1 anfänget, zu einander addiret; so heißt die Summe eine Polygonalzahl (Numerus Polygonus).

Die 9. Erklärung.

126. Insbesondere heißt es eine Triangularzahl, wenn die Differenz der Glieder in der Progression 1 ist; eine Quadratzahl, wenn sie 2 ist; eine Pentagonalzahl, wenn sie 3 ist; eine Hexagonalzahl, wenn sie 4 ist; u. s. w.

Arithm. Progr.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Triang. Zahl.	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36
Arithm. Progr.	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15
Quadr. Zahlen.	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64
Arithm. Progr.	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
Pentagonalzahl.	1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92
Arithm. Progr.	1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29
Hexagonalzahl.	1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120.

Anmerkung.

127. Ihr werdet inskünftige erfahren, daß es nicht ohne Nutzen sey, wenn man allerhand Progressionen der Zahlen summiren lernt. Zu dem Ende wollen wir auch untersuchen, wie man die Polygonalzahlen summiren kann.

Die 10. Erklärung.

128. Die Seite der Polygonalzahl heißt die Zahl der Glieder, welche von der Progression sind summirt worden, damit dieselbe entstanden ist.

Anmerkung.

129. Die Polygonalzahlen haben ihren Namen von den regulären Figuren, in welche sich die Einheiten, woraus sie bestehen, versetzen lassen. Es kommen aber in die Seite der Figur jederzeit so viel Einheiten oder Puncte (durch welche sie angedeutet werden) als Glieder von der Progression summiret worden sind, damit man die Polygonalzahl bekomme.

Die 11. Erklärung.

130. Durch die Zahl der Winkel verstehen wir diejenige, welche andeutet, wie viel Winkel die Figur hat, von welcher die Polygonalzahl ihren Namen bekommt.

Der 1. Zusatz.

131. Also ist die Zahl der Winkel in Trigonalzahlen 3; in Quadrat- oder Tetragonalzahlen 4; in Pentagonalzahlen 5 u. s. w.

Der 2. Zusatz.

132. Da nun in Trigonalzahlen der Unterscheid der Glieder 1, in Quadratzahlen 2, in Pentagonalzahlen 3 u. s. w. ist; so ist die Zahl der Winkel jederzeit um 2 größer als der Unterscheid

der Glieder in der Progreſſion, durch deren Summirung die Polygonalzahlen entſtehen.

Die 43. Aufgabe.

133. **Aus der gegebenen Seite einer Polygonalzahl und der Zahl der Winkel die Polygonalzahl zu finden.**

Auflöſung.

Es ſey die Seite $=a$,
Die Zahl der Winkel $=n$,
Das erſte Glied der Progr. iſt $=1$ (§. 125.)
Der Unterſcheid der Glieder $=n-2$ (§. 132.)
Das letzte Glied $1+(n-2)(a-1)$ (§. 113.)
$=an-2a-n+3$
das erſte Glied $=1$

Summe des erſten und letzten $an-2a-n+4$
halbe Zahl der Glieder $\frac{1}{2}a$ (§. 128.).

Polygonalzahl $\frac{1}{2}a^2n-a^2-\frac{1}{2}an+2a$ (§. 113.)
$=\frac{a^2n-2a^2-an+4a}{2}=\frac{(n-2)a^2-a(n-4)}{2}$

Es ſey $n=3$, ſo iſt die Trigonalzahl $=\frac{1a^2+1a}{2}$.

Es ſey $n=4$, ſo iſt die Tetragonalzahl $=\frac{2a^2-0a}{2}=a^2$.

Es ſey $n=5$, ſo iſt die Pentagonalzahl $=\frac{3a^2-1a}{2}$.

Es ſey $n=6$, ſo iſt die Hexagonalzahl $=\frac{4a^2-2a}{2}=$
$2a^2-a$.

Es ſey $n=7$, ſo iſt die Heptagonalzahl $=\frac{5a^2-3a}{2}$.

Es sey $n=8$, so ist die Octogonal Zahl $= \frac{6a^2 - 4a}{2} = 3a^2 - 2a$ u. s. w. unendlich fort.

Nämlich die um zwey verminderte Zahl der Winkel wird durch das Quadrat der Seite und die um 4 verminderte Zahl der Winkel durch die Seite der Polygonalzahl multiplicirt; das letztere Product aber von dem erstern abgezogen, und der Rest durch zwey dividirt.

Exempel.

Ihr sollt die sechste Trigonalzahl finden. Weil $a=6$; so ist $\frac{a^2+a}{2} = \frac{36+6}{2} = 18+3 = 21$. Wenn ihr die achte Pentagonalzahl suchet; so ist $a=8$, und also $\frac{3a^2-a}{2} = \frac{3.64-8}{2} = 3.32-4 = 96-4 = 92$. Wenn ihr die fünfte Hexagonalzahl suchet, so ist $a=5$, und also $2a^2 - a = 50 - 5 = 45$.

Die 44. Aufgabe.

134. Aus der gegebenen Polygonalzahl und der Zahl der Winkel die Seite zu finden.

Auflösung.

Es sey die Polygonalzahl $=p$, die Seite $=x$,
die Zahl der Winkel $=n$.
So ist der Unterscheid der Glieder $n-2$ (§. 132.)
das erste Glied 1 (§. 125.)
Derowegen das letzte $1+(x-1)(n-2)$ (§. 113. 128.),

das

das ist $3+nx-2x-n$
das erste Glied 1,

Summe des ersten und letzten $4+nx-2x-n$
halbe Zahl der Glieder $\frac{1}{2}x$ (§. 128.)

$$2x+\frac{1}{2}nx^2-x^2-\frac{1}{2}nx.$$

Derowegen ist:

$$\frac{1}{2}nx^2-x^2+2x-\frac{1}{2}nx=p$$
$$\quad 2$$
$$nx^2-2x^2-nx+4x=2p$$
$$\quad n-2$$
$$x^2-\left(\frac{n+4}{n-2}\right)x=\frac{2p}{n-2}$$

Das ist, wenn $(n-4):(n-2)=m$

$$x^2-mx=2p:(n-2)$$
$$\frac{1}{4}m^2 \qquad \frac{1}{4}m^2$$
$$x^2-mx+\frac{1}{4}m^2=\frac{1}{4}m^2+2p:(n-2)$$
$$x-\frac{1}{2}m=\sqrt{(\frac{1}{4}m^2+2p:(n-2))}$$
$$x=\frac{1}{2}m+\sqrt{(\frac{1}{4}m^2+2p:(n-2))}.$$

Das ist, wenn man für m seinen Werth setzet,

$$x=\frac{n-4}{2n-4}+\sqrt{\left(\frac{n^2-8n+16}{4n^2-16n+16}+\frac{4p}{2n-4}\right)}=\frac{n-4+\sqrt{(8p(n-2)+(n-4)^2)}}{2n-4}$$

Es sey $n=3$; so ist $x=\frac{-1+\sqrt{(8p+1)}}{2}$.

Es sey $n=4$; so ist $x=\frac{0+\sqrt{(16p+0)}}{4}$.

Es sey $n=5$; so ist $x=\frac{1+\sqrt{(24p+1)}}{6}$.

Es

Es sey $n=6$; so ist $x=\frac{2+\sqrt{(32p+4)}}{8}$.

Es sey $n=7$; so ist $x=\frac{3+\sqrt{(40p+9)}}{10}$.

Es sey $n=8$; so ist $x=\frac{4+\sqrt{(48p+16)}}{12}$.

u. s. w. unendlich fort.

Wenn ihr diese Polygonalzahlen betrachtet, so werdet ihr wahrnehmen, 1) daß überall die Zahl ausser dem Wurzelzeichen, die um 4 verringerte Zahl der Winkel; und 2) daß die andere Zahl unter dem Wurzelzeichen das Quadrat von dieser Zahl sey; 3) die erste aber dem Producte aus der Polygonalzahl in den Divisorem 4 mal genommen, gleiche, und 4) der Divisor die Summe der Zahl ausser dem Wurzelzeichen und der Zahl der Winkel ausmache.

Es sey 21 eine Trigonalzahl: ihr sollt die Seite finden, das ist, die wie vielste sie in ihrer Ordnung ist. Weil $p=21$, so ist die verlangte Seite $\frac{-1+\sqrt{(168+1)}}{2}=\frac{-1+\sqrt{169}}{2}=\frac{-1+13}{2}=\frac{12}{2}=6$. Es sey $p=45$ und zwar eine Hexagonalzahl; so ist die verlangte Seite $\frac{2+\sqrt{(32.45+4)}}{8}$ $=\frac{2+\sqrt{1444}}{8}=\frac{2+38}{8}=\frac{40}{8}=5$.

Zusatz.

135. Wenn ihr also nach und nach eine gegebene Zahl in die Stelle von p setzet; so werdet ihr sehen, ob sie mit unter die Polygonalzahlen gehöre, und in welche Reihe derselben sie zu setzen sey. Denn

Denn sie findet in allen Reihen statt, wo für ihre Seite eine ganze Nationalzahl herauskommt. Also, wenn euch 21 wäre gegeben worden, so würdet ihr gefunden haben, daß es die sechste Trigonalzahl sey.

Anmerkung.

136. Ihr dürfet aber nicht weiter versuchen, ob die gegebene Zahl sich für p setzen lasse, wenn ihr die Zahl der Winkel gleich wird, als in dem gegebenen Exempel 21.

Die 45. Aufgabe.

137. Die Größe des Products der beyden äussersten Glieder in einer geometrischen Proportion zu determiniren.

Auflösung.

Es sey in dem erstern Falle, wenn nur drey Glieder sind, das erste $=a$, der Exponent $=m$, so ist die Proportion

$$\div a \quad ma \quad m^2a \quad (\text{§. 66. 68. Arithm.})$$

$$\begin{array}{ccc} ma & & a \\ \hline m^2a^2 & = & m^2a^2 \end{array} \quad (\text{§. 88. Arithm.})$$

Es sey in dem andern Falle, wenn 4 Glieder sind, das erste $=a$, der Exponent $=m$, das dritte $=b$, so ist die Proportion

$$a : ma = b : mb \quad (\text{§. 66. Arithm.})$$

$$\begin{array}{ccc} b & & a \\ \hline mab & = & mab. \end{array}$$

Lehrsatz.

Wenn drey Größen einander geometrisch proportional sind, so ist das Product der beyden äussersten dem Quadrate der mittlern gleich: sind aber vier einander proportional, so ist das

Product

Product der äussersten dem Producte der beyden mittlern gleich.

Anmerkung.

138. Von den Zahlen ist dieses schon in der Rechenkunst erwiesen worden (§. 109. 110. *Arithm.*). Wir haben aber in der Geometrie solches mit Recht auch auf die Linien, Flächen und Körper gedeutet, indem man alle Größen als undeterminirte Zahlen ansehen kann (§. 9.); welches nun durch gegenwärtige algebraische Rechnung noch mehr gerechtfertigt wird.

Die 46. Aufgabe.

139. Drey geometrische Proportionalgrößen zu finden, aus dem gegebenen Producte des Quadrats der dritten in die erste, und dem Exponenten.

Auflösung.

Es sey das Product $=a$, die erste Größe $=x$,
der Exponent $=m$, so ist die andere $=mx$.
die dritte $=m^2x$.

Folglich: $a=m^4x^3$

$$a:m^4=x^3$$

$$\sqrt[3]{(a:m^4)}=x.$$

Es sey $a=648$, $m=3$, so ist $x=\sqrt[3]{(648:81)}$ $=\sqrt[3]{8}=2$, folglich $mx=6$, $m^2x=18$.

Probe: Denn $2.18=6.6=36$ (§. 137.).

Die 47. Aufgabe.

140. Aus der gegebenen Summe des ersten und vierten Gliedes in einer geometrischen Proportion, imgleichen der Summe des andern und dritten, und dem Exponenten, jedes Glied insbesondere zu finden.

Auflö-

Auflösung.

Es sey die erste Summe $=a$, das erste Glied $=x$,
die andere $=b$, so ist das II $=mx$,
der Exponent $=m$, das III $=b-mx$,
das IV $=a-x$.

Folglich:

$$x : mx = b - mx : a - x$$

daher $ax - x^2 = mbx - m^2x^2$ (§. 137.)

$$\overline{}\ x\ div.$$

$$a - x = mb - m^2x$$

$$m^2x - x = mb - a$$

$$\overline{}\ m^2 - 1\ div.$$

$$x = (mb - a) : (m^2 - 1).$$

Es sey $a=13$, $b=11$, $m=2$, so ist x $=22-13=\frac{2}{3}=3$, und $mx=6$, folglich sind die

$\overline{}$

$4-1$

vier Proportionalzahlen $3:6=5:10$.

Probe: Denn $3.10=5.6=30$ (§. 137.).

Die 48. Aufgabe.

141. Aus der gegebenen Summe des ersten und letzten Gliedes und dem Exponenten in einer geometrischen Proportion von 3 Gliedern, die Glieder selbst zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $=a$, das erste Glied $=x$,
der Exponent $=m$, das andere $=mx$,
das dritte $=m^2x$.

Folg-

Folglich: $a = m^2x + x$ (§. 137.)

$\overline{\hspace{6em}} \; m^2 + 1 \; div.$

$a : (m^2 + 1) = x.$

Es sey $a = 50$, $m = 2$, so ist $x = 50 : (4 + 1) = 50 : 5 = 10$, $mx = 20$, $m^2x = 40$.

Probe: Denn $10.40 = 20.20 = 400$ (§. 137.).

Die 49. Aufgabe.

142. Zu finden, auf wie vielerley Art die Glieder einer geometrischen Proportion versetzet werden können, damit sie einander proportional verbleiben.

Auflösung.

Versetzet sie auf alle mögliche Weise, und vergleichet ihre Summen, Unterscheide u. s. w. mit ihnen unter einander: so werdet ihr bald sehen, in welchen Fällen eine Proportion bleibt, wenn ihr nur Acht gebet, ob in beyden Verhältnissen, welche mit einander verglichen werden, einerley Exponent ist (§. 65. *Arithm.*).

Es sey demnach	$a : ma = b : mb$
so ist 1. (*alternatim*)	$a : b = ma : mb$
2. (*inverse*)	$ma : a = mb : b$
3. (*conversim*)	$a + ma : a = b + mb : b$
4. (*composite*)	$a + ma : ma = b + mb : mb$
5. (*divisim*)	$ma - a : a = mb - b : b$
	$ma - a : ma = mb - b : mb.$
Ferner	6. $a^2 : m^2a^2 = b^2 : m^2b^2$
oder überhaupt	$a^n : m^na^n = b^n : m^nb^n$
Imgleichen	7. $a : mac = b : mbc$
	8. $\frac{a}{} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{} : \frac{mb}{c}$
	9. $ac : ma = bc : mb$

10.

10. $\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb.$

11. $ac : mac = b : mb$

12. $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$

13. $ac : mac = bd : mbd$

14. $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

15. $ac : mad = bc : mbd$

16. $\frac{a}{c} : \frac{ma}{d} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{d}$

Es sey *ordinate* $a : ma = b : mb$
und $ma : mna = mb : mnb$
so ist 17 *ex æquo* $a : mna = b : mnb$
es sey *perturbate* $a : ma = b : mb$
und $ma : mna = b : \frac{b}{n}$

so ist 18 *ex æquo* $a : mna = \frac{b}{n} : mb.$

Anmerkung.

143. Hier habt ihr ohne Mühe 18 sehr nützliche Lehrsätze gefunden, welche ihr euch wohl bekannt machen müsset, wenn ihr inskünftige entweder die mathematischen Schriften zu lesen, oder auch durch eigenes Nachsinnen mathematische Wahrheiten heraus zu bringen gedenket. Denn die geometrische Proportion ist die Seele der mathematischen Wissenschaften. Der Beweis beruhet darauf, weil überall einerley Exponent für eine angegebene Proportion heraus kommt, als in dem 3 Lehrsatze ist $\frac{a+ma}{a} = 1+m$ und $\frac{b+mb}{b} = 1+m$; in dem siebenten $\frac{a}{mac} = \frac{1}{mc}$ und $\frac{b}{mbc} = \frac{1}{mc}$; in

dem siebenzehenden $\frac{a}{mna} = \frac{1}{mn}$ und $\frac{b}{mnb} = \frac{1}{mn}$. Ich halte es aber für unnöthig die gefundenen Lehrsätze mit Wörtern auszudrücken, weil ein jeder das für sich selbst thun kann, wenn er Lust darzu hat. Z. E. der 1 Lehrsatz lautet also: **Wenn vier Größen proportional sind, so verhält sich auch die erste zu der dritten, wie die andere zu der vierten.** Der II wird so gegeben: **Wenn ihr in einer geometrischen Proportion das erste und andere Glied durch eine Größe multipliciret; so bleiben auch die veränderten Größen den vorigen proportional.**

Die 50. Aufgabe.

144. **Zu finden, wie zwo Größen verändert werden können, daß doch ihre erste Verhältniß gegen einander unverändert bleibt.**

Auflösung.

Es seyn zwo Größen a und ma, welche sich gegen einander verhalten wie 1 zu m; so ist:

I. $a : ma$
$\quad c \quad c$

$ac : mac = a : ma$
$= 1 : m$

II. $a : ma$
$\quad c \quad c$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma = 1 : m$

III. $a : ma$
$\quad b : mb$

$a - b : ma - mb = a : ma = b : mb = 1 : m$

IV. $a : ma$
$\quad b : mb$

$a + b : ma + mb = a : ma = b : mb = 1 : m.$

Lehr=

Lehrsatz.

1. Wenn ihr zwo Größen durch eine dritte multipliciret, so verhalten sich die Producte gegen einander, wie die multiplicirten Größen. 2. Wenn ihr zwo Größen durch eine dritte dividiret, so verhalten sich die Quotienten wie dieselben Größen. 3. Wenn sich die weggenommenen Theile gegen einander verhalten wie die ganzen Größen, so verhalten sich auch die übrigen Theile wie die ganzen Größen. 4. Wenn die hinzu gesetzten Größen sich verhalten wie die Größen, zu welchen sie addiret werden, so haben auch die Summen eben selbige Verhältniß.

Und dieses letztere gehet an, auch wenn vieler Proportionalgrößen Förder- und Hinterglieder zu einander addiret werden. Z. E. Es sey $a:ma = b:mb = c:mc = d:md = e:me$ &c. so ist $a+b+c+d+e$ &c. $: ma+mb+mc+md+me$ &c. $= a:ma = 1:m$.

Die 51. Aufgabe.

145. Die Größe des Products der beyden äussersten Glieder in einer geometrischen Progression zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $=a$, der Exponent oder Name der Verhältniß $=m$, so ist die Progression

$$\begin{array}{ccccccc} a. & ma. & m^2a. & m^3a. & m^4a. & m^5a. & m^6a. \\ & m^5a & & m^3a. & m^2a. & & a \\ \hline & m^6a^2 & = & m^6a^2 = & m^6a^2 & = & m^6a^2. \end{array}$$

Lehrsatz.

In einer geometrischen Progression ist das Product der beyden äussersten Glieder dem Producte zweyer von den mittlern gleich, welche von den äussersten gleich weit abstehen, und dem Quadrate des mittlern, wenn sie an der Zahl ungleich sind. Und das letzte Glied in einer geometrischen Progression ist gleich dem Producte aus dem ersten Gliede in die Dignität des Exponenten, deren Grad um 1 weniger ist, als die Zahl der Glieder.

Die 52. Aufgabe.

146. Die Größe des Quotienten zu determiniren, welcher heraus kommt, wenn der Unterscheid der beyden äussersten Glieder durch den um 1 verringerten Exponenten dividirt wird.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $=a$, der Exponent $=m$, die Zahl der Glieder $=n$, so ist das letzte Glied $m^{n-1}a$, der Unterscheid des ersten und letzten $m^{n-1}a-a$. Dividiret denselben durch $m-1$, so kommt heraus $m^{n-2}a+m^{n-3}a+m^{n-4}a+m^{n-5}a+m^{n-6}a+m^{n-7}a$ u. s. w. Wenn demnach n eine determinirte Zahl ist, z. E. 7, so ist $n-7=0$ und demnach $m^{n-7}=m^0=1$, folglich $m^{n-7}a=a$. Solchergestalt ist der Quotient die Summe aller Glieder weniger das letzte.

$m-1$)

$$\begin{array}{l} m-1)m^{n-1}a-a \\ \quad m^{n-1}a-m^{n-2}a \\ \hline +m^{n-2}a-a \\ \quad m^{n-2}a-m^{n-3}a \\ \hline +m^{n-3}a-a \\ \quad m^{n-3}a-m^{n-4}a \\ \hline +m^{n-4}a-a \\ \quad m^{n-4}a-m^{n-5}a \\ \hline +m^{n-5}a-a \\ \quad m^{n-5}a-m^{n-6}a \\ \hline +m^{n-6}a-a. \text{ u. s. f.} \end{array} \qquad \begin{array}{l} m^{n-2}a+m^{n-3}a \\ +m^{n-4}a+m^{n-5}a \\ +m^{n-6}a \text{ \&c.} \end{array}$$

Zusatz.

147. Wenn ihr demnach den Unterscheid des ersten und letzten Gliedes in einer geometrischen Progression durch den um 1 verringerten Exponenten dividiret, und zu dem Quotienten das letzte Glied addiret; so habt ihr die Summe der ganzen Progression. Es sey das erste Glied a, der Exponent m, die Zahl der Glieder n, so ist das letzte Glied $m^{n-1}a$. Und demnach die Summe der Progression $m^{n-1}a+(m^{n-1}a-a):(m-1)$, das ist, wenn $m=2$, $a=1$, $n=8$, $128+127:1=255$. Wenn ihr alles zu einer Benennung bringet, so ist die Summe $(m^na-m^{n-1}a+m^{n-1}a-a):(m-1)$ $=(m^na-a):(m-1)$.

Die 53. Aufgabe.

148. **Aus dem gegebenen ersten und letzten Gliede, mit der Zahl der Glieder in einer geometrischen Progression, den Exponenten zu finden.**

Auflösung.

Es sey das erste Glied $=a$, der Exponent $=x$,
das letzte $=b$,
die Zahl der Glieder $=n$,

So ist $b=x^{n-1}a$ (§. 145.)

$$b:a=x^{n-1}$$

$$b^{1:(n-1)}:a^{1:(n-1)}=x.$$

Es sey $a=2$, $b=486$, $n=6$, so ist $x=\sqrt[5]{486:2}$ $=\sqrt[5]{243}=3$.

Probe: Denn $3^5.2=243.2=486$.

Die 54. Aufgabe.

149. Aus dem gegebenen Exponenten, der Zahl der Glieder, und der Summe der geometrischen Progreßion, das erste Glied zu finden.

Auflösung.

Es sey der Exponent $=m$, das erste Glied $=x$,
die Zahl der Glieder $=n$; so ist das letzte $=m^{n-1}x$
die Summe $=c$. (§. 145.)

Folglich:

$$c=(m^n x-x):(m-1) \qquad m-1$$

$$mc-c=m^n x-x \qquad m^n-1$$

$$(m-1)c:(m^n-1)=x.$$

Es sey $m=3$, $n=6$, $c=728$, so ist $x=2.728:728=2$.

Probe: Denn $(486-2):2+486=243-1+486=242+486=728$.

Die 55. Aufgabe.

150. Aus dem ersten und letzten Gliede und dem Exponenten, die Zahl der Glieder in einer geometrischen Progression zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $=a$, die Zahl der Glieder $=x$,
das letzte $=b$,
der Exponent $=m$.

So ist $m^{x-1}a=b$, das ist, wenn ihr den Logarithmum von $a=la$ und den Logarithmum von $m=lm$ setzet,

$$xlm-lm+la=lb \text{ (§. 23. Trig.)}$$

$$xlm=lb-la+lm$$

$$x=\frac{lb-la}{lm}+1.$$

Es sey $a=2$, $b=486$, $m=3$, so ist

$lb=2.6866363$

$la=0.3010300$

$lb-la=2.3856063$

```
          33 1 1   |
lb—la=23856063     | 5
lm=   4771213      | 1
                   ----
                   6=x.
```

Probe: Denn $2.243=486$ (§. 145.).

Die 56. Aufgabe.

151. Eine unendliche Zahl Brüche zu summiren, deren Zähler Eins ist, die Nenner aber in einer geometrischen Verhältniß fortgehen.

Auflösung.

Es sey der Nenner des ersten Bruches $=a$, der Exponent $=m$. Weil die Brüche unendlich abnehmen, so muß der letzte so klein werden, daß er, in Ansehung des ersten, für nichts zu halten ist. Und also ist die Differenz des ersten und letzten Gliedes dem ersten gleich, das ist, $1:a$, folglich die Summe $1:a+1:(ma-a)=(m-1+1):(ma-a)$ $=m:(m-1)a$.

Es sey $m=2$, so ist die Summe der Brüche $=2:a$, folglich $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ u. s. w. unendlich fort $=1$.

Es sey $m=3$, so ist die Summe der unendlichen Brüche $=3:2a$, folglich $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ u. s. unendlich fort $=3:6=\frac{1}{2}$.

Es sey $m=4$, so ist die Summe der unendlichen Brüche $=4:3a$, folglich $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}$ u. s. w. unendlich fort $=4:12=\frac{1}{3}$.

Die 57. Aufgabe.

152. **Die Summe unendlicher Brüche zu finden, deren gemeiner Zähler einer gegebenen Zahl gleich ist, die Nenner aber in einer geometrischen Progression fortgehen.**

Auflösung.

Es sey der gemeine Zähler $=b$, der Exponent der Nenner in der Progression $=m$, der Nenner des ersten Bruchs $=a$, so ist der erste Bruch $=\frac{b}{a}$.

Weil nun der letzte Bruch aus der unendlichen Progression, in Ansehung des ersten, nichts ist,

so

so ist der Unterscheid dieser beyden $\frac{b}{a}$, folglich die

Summe $\frac{b}{a} + \frac{b}{ma - a} = \frac{bm - b + b}{ma - a} = \frac{bm}{(m - 1)a}$.

Es sey $m = 2$, $a = 6$, $b = 3$, so ist die Summe der Progression $= 6:6 = 1$, das ist, $\frac{3}{6} + \frac{3}{12} + \frac{3}{24}$ u. s. w. unendlich fort.

Eben so findet ihr, daß $\frac{5}{7} + \frac{5}{21} + \frac{5}{63}$ u. s. w. unendlich fort $= 15:14 = 1\frac{1}{14}$.

Imgleichen findet ihr, daß $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}$ &c. $= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Anmerkung.

153. Diese Aufgaben gehören in die Arithmeticam infinitorum, welche *Johannes Wallisius* zuerst erfunden, und *Ismaël Bullialdus* weiter ausgeführet hat: ich aber in meinen Elementis Analyseos Infinitorum zwar kurz, jedoch viel allgemeiner als beyde abgehandelt habe. Allein, weil man dieselben nicht mehr sonderlich nöthig hat, nachdem der Herr von Leibnitz seine Differential- und Integralrechnung bekannt gemacht; so wollen wir uns auch mit derselben nicht aufhalten.

Die 12. Erklärung.

154. Drey oder vier Größen sind harmonisch proportional, wenn in dem ersteren Falle der Unterscheid der ersten und andern sich verhält zu dem Unterscheide der andern und dritten, wie die erste zu der dritten: in dem andern Falle, wenn der Unterscheid der ersten und andern zu dem Unterscheide der dritten und vierten sich verhält, wie die erste zu der vierten. Dergleichen Zahlen sind 2, 3 und 6, denn 1:3=2:6.

Die 13. Erklärung.

155. Wenn in dem erstern Falle die Glieder vervielfältiget werden; so entstehet eine harmonische Progression.

Die 58. Aufgabe.

156. Zu zwoen gegebenen Größen die dritte harmonische Proportionalgröße zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $=a$, die dritte $=x$.
die andere $=b$,

So ist (§. 154.).

$$b-a:x-b=a:x$$

$$ax-ab=bx-ax \text{ (§. 137.).}$$

$$2ax-bx=ab$$

$$2a-b$$

$$ab:(2a-b)=x.$$

Es sey $a=10$, $b=16$; so ist $x=160:(20-16)$ $=160:4=40$.

Probe: Denn $16-10:40-16=6:24=10:40$ $=1:4$.

Der 1. Zusatz.

157. Wenn $2a=b$; so ist $x=ab:o$, und also $1:o=x:ab$, folglich kann keine harmonische Proportionalgröße gefunden werden: welches viel weniger angehet, wenn b größer ist als $2a$.

Der 2. Zusatz.

158. Wenn man die dritte Größe für die andere nimmt; so kann man auf gleiche Weise die vierte finden, und so weiter fort.

Die Glieder einer harmonischen Progression

$a, b, \frac{ab}{2a-b}\ \frac{ab}{3a-2b}\ \frac{ab}{4a-3b}\ \frac{ab}{5a-4b}$

$\frac{ab}{6a-5b}\ \frac{ab}{7a-6b}$ &c.

Die 59. Aufgabe.

159. Zwischen zwoen gegebenen Größen die mittlere harmonische Proportionalgröße zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $=a$, die andere $=x$,
die dritte $=b$.

So ist (§. 154.).

$x-a:b-x=a:b$

$bx-ab=ab-ax$ (§. 137.)

$bx+ax=2ab$ $\quad a+b$

$x=2ab:(a+b)$.

Es sey $a=10$, $b=40$; so ist $x=800:50=16$.

Probe: Denn $16-10:40-16=6:24=10:40$ $=1:4$, wie vorhin (§. 156.).

Die 60. Aufgabe.

160. Zu dreyen gegebenen Größen die vierte harmonische Proportionalgröße zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $=a$, die vierte $=x$.
die andere $=b$,
die dritte $=c$,

So ist (§. 154.)

$$b - a : x - c = a : x$$

$$bx - ax = ax - ac \quad (§. 137.)$$

$$ac = 2ax - bx$$

$$\overline{\qquad\qquad} \quad 2a - b$$

$$ac : (2a - b) = x.$$

Es sey $a=6$, $b=8$, $c=12$, so ist $x=72:(12-8)$ $=72:4=18$.

Probe: Denn $8-6:18-12=2:6=6:18$ $=1:3$ (§. 154.).

Anmerkung.

161. Nachdem wir den Nutzen der Algebra in arithmetischen Exempeln gezeiget haben; so ist es Zeit, daß wir zu geometrischen Aufgaben schreiten.

Die 61. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 1. 162. Aus dem gegebenen Radio des Circuls ED die Seite des in ihm beschriebenen regulären Dreyecks AB zu finden.

Auflösung.

Es sey DB die Seite des Sechsecks. Weil DB=BE (§. 135. *Geom.*), und bey F rechte Winkel sind (§. 125. *Geom.*); so ist auch DF=EF (§. 96. *Geom.*). Es sey demnach:

$$DB = a, \qquad BA = x.$$

$$\text{So ist } DF = \tfrac{1}{2}a \qquad BF = \tfrac{1}{2}x.$$

$$\text{folglich } \tfrac{3}{4}aa = \tfrac{1}{4}xx \quad (§. 172. \textit{ Geom.}).$$

$$\overline{\qquad\qquad} \quad 4$$

$$3aa = xx$$

$$\sqrt{3aa} = x.$$

Ihr

Ihr findet demnach x, wenn ihr zwischen $3a$ und a die mittlere Proportionallinie suchet (§. 210. *Geom.*). Besser aber geschiehet es also: Aus A und B machet mit dem Diameter AB einen Durchschnitt in D, und ziehet aus dem Mittelpuncte C die Linie CD. Diese ist die Seite des Dreyecks. Denn, da $DB^2=4a^2$, und $CB^2=a^2$, so ist $DC^2=3aa$ (§. 172. *Geom.*); folglich $DC=\sqrt{3aa}$. Oder machet $AE=a$; so ist, wegen des rechten Winkels bey E (§. 115. *Geom.*), $EB=\sqrt{3aa}$ (§. 172. *Geom.*). Tab. I. Fig. 2.

Der 1. Zusatz.

163. Weil $3aa=xx$, so ist $aa:xx=1:3$, das ist, $DE^2:AB^2=1:3$. Tab. I. Fig. 1.

Der 2. Zusatz.

164. Wenn die Seite des Dreyecks b gegeben ist, und ihr solltet den Radium des Circuls y finden, welcher um selbiges beschrieben werden kann; so habt ihr $3y^2=b^2$, und also ist $y=\sqrt{\frac{1}{3}b^2}$: folglich dürfet ihr nur zwischen der Linie AB (b) und dem dritten Theile derselben ($\frac{1}{3}b$) die mittlere Proportionallinie suchen (§. 210. *Geom.*). Tab. I. Fig. 1.

Der 3. Zusatz.

165. Die halbe Seite AB, nämlich BF ist der Sinus des Bogens BD von 60° (§. 2. *Trig.*). Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe den Sinum von 60° finden (§. 11. *Trigon.* 112. *Arithm.*).

Die 62. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 3. 166. Aus dem gegebenen Radio des Circuls AC die Seite des in ihm beschriebenen regulären Achtecks zu finden.

Auflösung.

Es sey AC=BC=DC=a, BD=x; so ist AB $=\sqrt{2a^2}$ (§. 172. *Geom.*).

BE$=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2}$ (§. 125. *Geom.*) $=\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$ (§. 54.),
EC$=\sqrt{(a^2-\frac{1}{2}a^2)}$ (§. 172. *Geom.*) $=\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$,
DE$=a-\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$,

Folglich:

$$DE^2=\tfrac{3}{2}a^2-2a\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}$$
$$BE^2=\qquad\tfrac{1}{2}a^2$$
$$DB^2=2a^2-2a\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}\ (\text{§. 172. Geom.})$$
$$DB=\sqrt{(2a^2-2a\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2})}.$$

Zusatz.

167. Die halbe Seite des Achtecks ist der Sinus des Bogens von 22° 30′ (§. 2. *Trig.*): diesen könnet ihr demnach durch gegenwärtige Aufgabe finden.

Die 63. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 3. 168. Aus der gegebenen Seite des Achtecks DB den Radium des Circuls AC zu finden, welcher um dasselbe beschrieben werden kann.

Auflösung.

Es sey DB=b, BC=y, so ist, vermöge dessen, was bey der vorhergehenden Aufgabe erwiesen worden,

$$b^2 = 2y^2 - 2y\sqrt{\tfrac{1}{2}y^2}$$

$$2y\sqrt{\tfrac{1}{2}y^2} = 2y^2 - b^2$$

$$2y^4 = 4y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$

$$-b^4 = 2y^4 - 4b^2y^2$$

2

$$-\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2$$

$$b^4 \qquad b^4 \quad (\S.\ 83.)$$

$$\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 + b^4$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}b^4} = y^2 - b^2$$

$$b^2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}b^4} = y^2$$

$$\sqrt{(b^2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}b^4})} = \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})} = y.$$

Eine geometrische Construction hat man zwar nicht nöthig, weil sie aus den Anfangsgründen der Geometrie leichter zu haben ist. Doch kann man den Radium y und den Mittelpunct des Circuls aus dem gefundenen Werthe folgender Gestalt finden. 1) Theilet die Seite des Achtecks AB in zween gleiche Theile in D, und beschreibet darüber einen halben Circul AFB; so ist AF=FB=$\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$ (§. 172. *Geom.*). 2) Ziehet aus dem Mittelpuncte D durch F eine gerade Linie DC, welche auf AB perpendicular stehet. 3) Machet AE=2AB+2FB=$2b + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$, und beschreibet über AE einen halben Circul; so ist AC=$\sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})}$ oder der verlangte Radius, und in C der Mittelpunct des Circuls, welcher um das Achteck beschrieben wird (§. 210. *Geom.*). Tab. I. Fig. 4.

Es ist auch nicht nöthig, daß man AFB und ACE beschreibt, denn man darf nur AD und DF einander gleich machen, BF in BH tragen, und mit HA den Perpendicul DC in C durchschneiden, so

so hat man den Mittelpunct C, woraus durch A und B der verlangte Circul beschrieben wird. Und diese Construction ist so beschaffen, daß man sie in die Anfangsgründe der Geometrie eintragen kann.

Die 64. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 5. 169. **Aus dem gegebenen Radio des Circuls AC die Seite des Zehenecks AB zu finden.**

Auflösung.

Weil AB$=\frac{1}{10}$ der Peripherie, so ist der Winkel ACB 36°, folglich sind die Winkel CAB und ABC ein jeder 72° (§. 109. *Geom.*). Machet AD=AC, so ist jeder von den Winkeln ADC und DCA 36° (§. 101. 107. *Geom.*): daher DCB 72°, und demnach BD:BC=BC:BA (§. 183. *Geom.*). Es sey AC=BC=AD=a, AB=x, so ist BD=$a+x$, und dannenhero vermöge dessen, was erwiesen worden ist,

$$a+x : a = a : x$$

$$a^2 = ax + x^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 \quad (\S.\ 83.)$$

$$\frac{5}{4}a = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2$$

$$\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a = x.$$

Tab. I. Fig. 6. Richtet auf dem Diameter AB den Radium DC=a aus dem Mittelpuncte C perpendicular auf (§. 95. *Geom.*), und theilet CB in 2 gleiche Theile in E (§. 120. *Geom.*); so ist CE=$\frac{1}{2}a$, und folglich DE=$\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 172. *Geom.*): machet EF=DE, so ist CF=$\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-\frac{1}{2}a$.

Anmer-

Anmerkung.

170. Auf solche Art lehret *Ptolomæus* Almag. lib. 1. die Seite des Zehenecks zu finden.

Die 65. Aufgabe.

171. Aus dem gegebenen Radio des Circuls DC, die Seite des Fünfecks AB zu finden. Tab. I. Fig. 3.

Auflösung.

Es sey $DC = a$ $AB = x$

so ist $DB = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$ (§. 169.) $BE = \frac{1}{2}x$

$EC = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$

$DE = a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$.

Folglich:

$$DE^2 = 2a^2 - \frac{1}{4}x^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$$
$$BE^2 = \frac{1}{4}x^2$$

also $DB^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$

es ist auch $DB^2 = \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

Daher $\frac{1}{2}a + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} = 0$

(§. 31. *Ar.*)

a

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = 2\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$$

$$\frac{6}{4}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = 4a - x^2$$

$$x^2 = \frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$
$$= a^2 + \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}.$$

Demnach $AB^2 = DC^2 + DB^2$, das ist, das Quadrat des regulären Fünfecks ist gleich dem Quadrate des Sechsecks und Zehnecks, welche in einem Circul beschrieben sind, zusammen genommen. Daher, weil DC die Seite des Sechsecks, und FC die Seite des Zehnecks (§. 169.); so ist DF die Seite des Fünfecks. Tab. I. Fig. 3. Tab. I. Fig. 6.

Anmerkung.

172. *Ptolomæus* lehret abermals die Seite des Fünfecks auf solche Art finden.

Zusatz.

173. Die halbe Seite des Fünfecks ist der Sinus von 36°, die halbe Seite des Zehnecks der Sinus von 18° (§. 2. *Trig.*). Derowegen könnet ihr aus dem gegebenen Radio des Circuls diese beyden Sinus finden (§. 11. *Trig.*).

Die 66. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 6. 174. Eine gerade Linie AC dergestalt in F zu schneiden, daß die ganze Linie AC sich zu dem größern Theile CF verhält, wie der größere Theil CF zu dem kleinern FA, oder daß $CF^2 = AC$ in. FA.

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $CF = x$, so ist $FA = a - x$ und also

$$x^2 = aa - ax$$

$$x^2 + ax = a^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2 \text{ (§. 83.)}$$

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2$$

$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a.$$

Tab. I. Fig. 6. Setzet $AC = DC = a$ rechtwinklicht zusammen, und machet $CE = \tfrac{1}{2}a$, so ist $DE = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$ (§. 172. *Geom.*). Machet ferner $EF = DE$, so ist die Linie AC in F auf verlangte Art getheilet.

Anmer-

Anmerkung.

175. Die alten Geometræ nennen dieses lineam media & extrema ratione secare. Man pflegt es auch divinam sectionem zu nennen, weil (wie aus dem *Euclide* zu sehen ist) man viel aus dieser Linientheilung demonstrirt hat.

Zusatz

176. Wenn a der Radius eines Circuls ist, so ist der größere Theil von der Linie x die Seite des Zehenecks (§. 169.).

Die 67. Aufgabe.

177. Aus der gegebenen Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks AB und seinem Inhalte, das Dreyeck ABD zu zeichnen. Tab. I. Fig. 7.

Auflösung.

Es sey $AB=a$, der Perpendicul $DC=y$,
der Inhalt $=bb$, so ist der Inhalt $=\frac{1}{2}ay$,
(§. 156. *Geom.*)

und demnach $\frac{1}{2}ay=bb$

$$y=\frac{2bb}{a}.$$

Beschreibet über $AB=a$ einen halben Circul: richtet in A auf dem Diameter $AE=2b$ perpendicular auf, und ziehet die Linie EB. Machet $AG=\frac{1}{2}AE-b$, und ziehet FG mit EB parallel; so ist $AF=2bb:a$ (§. 87. *Geom.*). Wenn demnach FD mit dem Diameter AB parallel gezogen wird; so giebt sich der verlangte Triangel ADB.

Die 68. Aufgabe.

178. Aus dem gegebenen Umfange AB Tab. I. Fig. 8.
$+BC+CA$ eines rechtwinklichten Triangels

und seinem Inhalte, die größte Seite BC zu finden.

Auflösung.

Es sey $AB+BC+CA=a$, $BC=x$,
der Inhalt $=bb$, so ist $AC+BA=a-x$,

$$(AC+BA)^2=a^2-2ax+x^2$$
$$AC^2+BA^2=x^2 \quad (\text{§. 172. } \textit{Geom.})$$
$$\overline{2BA.AC=a^2-2ax} \quad (\text{§. 93. } \textit{Arithm.})$$

daher (§. 156. *Geom.*)

$$a^2-2ax=4bb$$
$$a^2-4bb=2ax$$
$$\tfrac{1}{2}a-\frac{2bb}{a}=x.$$

Tab. I. Fig. 9. Suchet zu $AB=a$, $BC=2b$, und $BD=b$ die vierte Proportionallinie $BE=2bb:a$ (§. 187. *Geom.*). Beschreibet mit $BF=\tfrac{1}{2}a$ den Bogen FG; so ist $EG=x$, und ihr könnet den verlangten Triangel nach der vorhergehenden Aufgabe beschreiben.

Anmerkung.

179. Weil alle Flächen durch das Quadrat ausgemessen werden (§. 147. *Geom.*); so giebt man in geometrischen Aufgaben jederzeit die Fläche durch eine Linie, deren Quadrat ihr gleich ist.

Die 69. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 10. 180. Aus der gegebenen Grundlinie BC und den beyden Winkeln an derselben B und C, die Höhe AD zu finden.

Auflösung.

Es sey $BC=a$, $AD=x$. Weil bey D rechte Winkel sind, so wisset ihr auch die Winkel BAD und

und DAC (§. 102. *Geom.*). Es sey der Sinus des Winkels ABD$=t$, der Sinus des Winkels BAD$=r$, der Sinus des Winkels DAC$=q$, der Sinus des Winkels ACD$=p$; so ist $t:r=x:$BD, und $p:q=x:$DC (§. 43. *Trig.*), folglich BD$=rx:t$; und DC$=qx:p$. Derowegen, weil BD+DC=BC, so habt ihr

$$rt:t+qx:p=a$$
$$\overline{}\ pt$$
$$prx+tqx=apt$$
$$\overline{}\ pr+tq$$
$$x=apt:(pr+tq).$$

Anderst.

Wenn ihr AD als den Sinum totum ansehet, so ist BD der Tangens des Winkels BAD, und DC der Tangens des Winkels DAC (§. 6. *Trigon.*). Es sey der Sinus totus $=t$, die Tangentes seyn m und n, so ist $t:m=x:$BD, und $t:n=x:$DC: folglich ist BD$=mx:t$, und DC$=nx:t$, und demnach

$$a=(nx+mx):t$$
$$\overline{}$$
$$at=nx+mx$$
$$\overline{}\ n+m$$
$$at:(n+m)=x.$$

Suchet also zu der Summe der Tangentium der beyden Winkel BAD und DAC, dem Sinu toto und der Grundlinie BC die vierte Proportionalzahl (§. 113. *Arithm.*); so kommt die Höhe des Triangels AD heraus.

Die 70. Aufgabe.

181. **Aus dreyen gegebenen Seiten eines Triangels AB, AC und CB die Höhe AD zu finden.** Tab. I. Fig. 10.

Auflösung.

Es sey AB $=a$, BD $=x$,
BC $=b$, so ist DC $=b-x$.
AC $=c$,

Weil nun $AB^2 - BD^2 = AD^2$, und $AC^2 - DC^2 = AD^2$ (§. 172. *Geom.*), so ist auch $AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$, folglich

$$a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2bx$$

$$\frac{a^2 - c^2}{2b} + \tfrac{1}{2}b = x.$$

Folglich $(a^2 - c^2) : 2b = (a+c)(a-c) : 2b$ der halbe Unterscheid der Theile CD und BD) §. 61.).

Lehrsatz.

Tab. I. Fig. 10. Wenn in einem Triangel ACB aus dem Scheitelpuncte A auf die Grundlinie CB ein Perpendicul AD gefället wird; so verhält sich die Grundlinie BC zu den beyden Schenkeln AB und AC zusammen genommen, wie der Unterscheid derselben zu dem Unterscheide der Theile von der Grundlinie BD und CD.

Wenn ihr BD habt, so könnet ihr (§. 172. *Geom.*) AD finden.

Es sey $a=6$, $b=4$, $c=3$, so ist $x=(36-9):8 + 2 = 27:8 + 2 = 5\tfrac{3}{8}$ oder $=(9.3):8 + 2 = 27:8 + 2 = 3\tfrac{3}{8} + 2 = 5\tfrac{3}{8}$.

$$AB^2 = 2304:64$$
$$BD^2 = 1849:64$$
$$AD^2 = 455:64 \quad (\S.\ 172.\ \textit{Geom.})$$

4	55	00	00	$21\frac{33}{100}$ demnach ist
4				AD=2133:800.
	55			
	41			
	14	00		
	4	23		
	12	69		
	1	31	00	
		42	63	
	1	27	89	
		3	11 u. s. w.	

Anmerkung.

182. Auf eine gleiche Weise könnet ihr aus dreyen gegebenen Seiten die Höhe des Triangels finden, wenn er stumpfwinklicht ist.

Zusatz.

183. Derowegen könnet ihr auch aus dreyen gegebenen Seiten den Inhalt eines Triangels finden (§. 156. *Geom.*).

Die 71. Aufgabe.

184. Aus dem gegebenen Inhalte eines rechtwinklichten Triangels ABC, dessen drey Seiten AC, BA, BC in einer geometrischen Progreßion sind, die Seiten selbst zu finden. Tab. I. Fig. 8.

Auflösung.

Es sey der Inhalt $= a^2$, $AB = y$,

$CA = x$,

so ist $BC = \frac{x^2}{y}$ (§. 113. *Arithm.*),

und demnach

$$x^4 : y^2 = x^2 + y^2 \text{ (§. 172. Geom.)}$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; y^4$$

$$x^4 = x^2y^2 + y^4$$

$$x^4 - x^2y^2 = y^4,$$

$$xy = 2a^2 \text{ (§. 156. Geom.)}$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; y$$

$$x = 2a^2 : y$$

$$x^2 = 4a^4 : y^2$$

$$x^4 = 16a^8 : y^4$$

ingleichen

$$y = 2a^2 : x$$

$$y^2 = 4a^4 : x^2$$

$$y^4 = 16a^8 : x^4.$$

Hieraus nun wird gefunden.

$$\frac{16a^2}{y^4} - 4a^4 = y^4$$

$$16a^8 - 4a^4y^4 = y^8$$

$$16a^8 = y^8 + 4a^4y^4$$

$$4a^8 \qquad 4a^8$$

$$20a^8 = y^8 + 4a^4y^4 + 4a^8$$

$$2a^4\sqrt{5} = y^4 + 2a^4$$

$$a^4(2\sqrt{5} - 2) = y^4$$

$$a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)} = y$$

$$x^4 - 4a^4 = \frac{16a^8}{x^4}$$

$$x^8 - 4a^4x^4 = 16a^8$$

$$4a^8 \qquad 4a^8$$

$$x^8 - 4a^4x^4 + 4a^8 = 20a^8$$

$$x^4 - 2a^4 = 2a^4\sqrt{5}$$

$$x^4 = a^4(2 + 2\sqrt{5})$$

$$x = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}.$$

Richtet

Richtet auf AB=a eine Perpendicularlinie CA=$2a$ auf; so ist BC=$\sqrt{5aa}$. Machet DB=AB=a; so ist DC=$\sqrt{5aa}-a$. Traget DC aus C in E, und aus E in K die Linie CA=$2a$, und beschreibet sowohl über AE als AK einen halben Circul. Ziehet durch C mit AB die Linie FL parallel; so ist FC=$\sqrt{(2a\sqrt{5aa}-2aa)}$, und CL=$\sqrt{(2aa+2a\sqrt{5aa})}$, oder FC=$(\sqrt{2a^2\sqrt{5}-2a^2})=a\sqrt{(2\sqrt{5}-2)}$ und CL=$a\sqrt{(2+2\sqrt{5})}$. Theilet CA in zween gleiche Theile in H, daß CH=a, und machet CG=CF, und CM=CL. Beschreibet sowohl über HG, als HM einen halben Circul; so ist Tab. I. Fig. 11.

CI=$\sqrt{(aa\sqrt{(2\sqrt{5}-2)})}=a\sqrt[4]{(2\sqrt{5}-2)}=y$, und

CN=$\sqrt{(a^2\times(2+2\sqrt{5}))}=a\sqrt[4]{(2+2\sqrt{5})}=x$. Derowegen wenn ihr CO=CN machet, und die Linie IO ziehet; so ist ICO der verlangte Triangel.

Die 72. Aufgabe.

185. **Aus der gegebenen Summe der Seiten AC+AB in einem rechtwinklichten Triangel CAB und dem Perpendicul AD, die Seiten zu finden.** Tab. I. Fig. 8.

Auflösung.

Es sey AB+AC=a, CA—BA=y, BC=x, AD=b; so ist AC=$\frac{1}{2}(a+y)$, AB=$\frac{1}{2}(a-y)$ (§. 61. 172. 183. *Geom.*).

Folglich:

$$x^2=\tfrac{1}{2}(aa+yy)$$
$$2x^2=aa+yy$$
$$2x^2-a^2=y^2,$$

BA:DA=BC:AC

$$\tfrac{1}{2}(a-y):b=x:\tfrac{1}{2}(a+y)$$
$$\tfrac{1}{4}(aa-yy)=bx$$
$$aa-4bx=yy.$$

Derowegen $2x^2 - aa = aa - 4bx$

$x^2 + 2bx = aa$

$x^2 + 2bx + bb = aa + bb$ (§. 83.).

$x = \sqrt{(aa + bb)} - b$.

Tab. I. Fig. 12. Auf der gegebenen Linie CD$=a$ beschreibet ein Rectangulum CDFG, dessen Höhe DF der Höhe des Triangels b gleich ist: so ist CF $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Machet FE$=$FD, und CB$=$CE: so ist CB$=$ $\sqrt{(a^2 + b^2)} - b$. Beschreibet demnach über CB einen halben Circul, und ziehet die Linien AB und AC; so ist CAB der verlangte Triangel.

Die 73. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 13. 186. **Aus dem gegebenen Sinu eines Winkels, den Sinum des doppelten, dreyfachen, vierfachen ꝛc. Winkels zu finden.**

Auflösung.

Es sey der einfache Winkel LAM. Nehmet AB für den Sinum Totum an, und machet AB $=$BC$=$DC$=$DE$=$EK, so ist BF der Sinus des Winkels A (§. 3. *Trigon.*), und AF$=$FC (§. 107. *Geom.*) der Cosinus (§. 7. *Trig.*). Ferner DBC $=$2BAC (§. 101. 107. *Geom.*), DCE$=$CDA $+$CAD (§. *cit.*) $=$3CAD, KDE$=$DEA$+$KAE (§. *cit.*) $=$4KAE u. s. w. Weil nämlich CDA $=$CBD (§. 107. *Geom.*) $=$2BAC, wie erwiesen worden ist, und DEA$=$DCE (§. 107. *Geom.*) $=$3KAE, wie gleichfalls erwiesen worden ist. Folglich ist GC der Sinus des doppelten, DH des dreyfachen, EI des vierfachen Winkels A (§. 3. *Trigon.*); hingegen BG der Cosinus des doppelten, CH des dreyfachen, DC des vierfachen Winkels (§. 7. *Trigon.*).

Es sey $AB=r$, $BF=b$, $AF=c$, so ist $AB:BF=AC:GC$ (§. 183. *Geom.*)

$$r \quad b \quad 2c \quad 2bc:r$$

$$AB:AF=AC:AG \text{ (§. cit.)}$$

$$r \quad c \quad 2c \quad 2cc:r.$$

Derowegen ist $BG=GD=2cc:r-r=(2cc-rr):r=$ (weil $r^2=b^2+c^2$)$(2cc:-b^2-c^2):r=(c^2-b^2):r$, folglich $AD=AG+GD=(3c^2-b^2):r$.

Es ist ferner (§. 184. *Geom.*)

$$AB:BF=AD:DH$$

$$r: \quad b=\frac{3c^2-b^2}{r}:\frac{3bc^2-b^3}{r^2}$$

$$AB:AF=AD:AH$$

$$r:c=\frac{3c^2-b^2}{r}:\frac{3c^3-b^2c}{r^2}.$$

Derowegen ist $CH=HE=AH-AC=(3c^3-b^2c):r^2-2c=(3c^3-b^2c-2cr^2):r^2=$ (weil $r^2=c^2+b^2$)$(3c^3-b^2c-2c^3-2b^2c):r^2=(c^3-3b^2c):r^2$, folglich $AE=EH+HA(3c^3-b^2c+c^3-3b^2c):r^2=(4c^3-4b^2c):r^2$.

Es ist weiter (§. 183. *Geom.*)

$$AB:BF=AE:EI$$

$$r:b=\frac{4c^3-4b^2c}{r^2}:\frac{4bc^3-4b^3c^2}{r^3},$$

$$AB:AF=AE:AI$$

$$r:c=\frac{4c^3-4b^2c}{r^2}:\frac{4c^4-4b^2c^2}{r^3}.$$

Derowegen ist $DI=AI-AD=(4c^4-4b^2c^2):r^3-(3c^2+b^2):r=(4c^4-4b^2c^2-3c^2r^2+br^2):r^3=(4c^4-4b^2c^2-3b^2c^2-3c^4+b^4+b^2c^2):r^3=(c^4-6b^2c^2+b^4):r^3$, weil nämlich $r^2=b^2+c^2$.

Wenn

Wenn demnach der Sinus totus r, der Sinus des einfachen Winkels b, und sein Cosinus c ist, so ist der Sinus

des zweyfachen $2bc : r$
des dreyfachen $(3bc^2 - b^3) : r^2$
des vierfachen $(4bc^3 - 4b^3c) : r^3$
des fünffachen $(5bc^4 - 10b^3c^2 + b^5) : r^4$
des sechsfachen $(6bc^5 - 20b^3c^3 + 6b^5c) : r^5$

Hingegen der Sinus Complementi oder Cosinus

des zweyfachen $(cc - bb) : r$
des dreyfachen $(c^3 - 3b^2c) : r^2$
des vierfachen $(c^4 - 6b^2c^2 + b^4) : r^3$
des fünffachen $(c^5 - 10b^2c^3 + 5b^4c) : r^4$
des sechsfachen $(c^6 - 15b^2c^4 + 15b^4c^2 - b^6) : r^5$.

Wenn ihr diese Formuln gegen das Potenzentäflein (§. 91.) haltet, so werdet ihr wahrnehmen, daß die Glieder für die Sinus aus den geraden, für die Cosinus aber aus den ungeraden Stellen der Potenzen genommen werden, nur daß das Mehr- und Minderzeichen beständig abwechselt. Wollt ihr demnach allgemeine Formuln haben; so dürfet ihr sie nur aus der allgemeinen Formul für die Potenzen ausschreiben. Nämlich der Sinus des vielfachen Bogens ist

$$\frac{mc^{m-1}b}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1.m-2.c^{m-3}b^3}{1.\ 2.\ 3.\ r^{m-1}} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.c^{m-5}b^5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ r^{m-1}} \ \&c.$$

Hingegen sein Cosinus ist

$$\frac{c^m}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1.c^{m-2}b^2}{1.\ 2.\ r^{m-1}} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.c^{m-4}b^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ r^{m-1}} \ \&c.$$

Zusatz.

Zusatz.

187. Weil der Tangens des einfachen Winkels $t = br : c$, und also $c = br : t$ (§. 18. *Trig.*) und (§. *cit.*) wenn der Tangens des zwiefachen v ist

$$\frac{c^2 - b^2}{r} : \frac{2bc}{r} = r : v$$

das ist $c^2 - b^2 : 2bc = r : v$

oder $\frac{b^2r^2}{t^2} - b^2 : \frac{2b^2r}{t} = r : v$

so ist $r^2 - t^2 : 2tr = r : v$

und $v = \frac{2tr^2}{r^2 - t^2}$

Anmerkung.

188. Auf eben diese Art könnet ihr die Tangentes der übrigen vielfachen Winkel, ja auch eine allgemeine Formul für alle Tangentes der vielfachen Winkel finden. Ihr könnet aber auch die Tangentes suchen, ohne daß ihr nöthig habt, die Sinus zu wissen, wie in der folgenden Aufgabe gezeigt wird. Und dazu habt ihr folgenden Satz nöthig.

Wenn der Winkel CAB durch die Linie EA in zween gleiche Theile getheilet wird, so verhält sich die eine Seite AB zu dem ihr anliegenden Theile der Grundlinie BE, wie die Seite AC zu dem Theile EC, welcher an ihr liegt. Tab. II. Fig. 14.

Beweis.

Verlängert BA in D, bis AD=AC, und ziehet die Linie CD. Weil der Winkel CAB=ACD +ADC (§. 101. *Geom.*), und ACD=ADC (§. 107. *Geom.*); so ist ACD=$\frac{1}{2}$CAB=CAE, folglich EA mit CD parallel (§. 98. *Geom.*), und daher BA : BE =AD(=AC) : EC (§. 184. *Geom.*). W. Z. E.

Zusatz.

Zusatz.

189. Derowegen verhält sich auch BA : AC = BE : EC, folglich BA + AC : AC = BC : EC (§. 142.).

Die 74. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 15. 190. Aus dem Tangente und Secante des einfachen Winkels die Tangentes und Secantes des zweyfachen, dreyfachen, vierfachen ꝛc. zu finden.

Auflösung.

Nehmet AB für den Sinum totum an, so ist BC der Tangens des einfachen Winkels CAB, BD der Tangens des zweyfachen DAB u. s. w.

Es sey $AB = a$, $BC = b$, $BD = x$; so ist $CD = x - b$, $CD^2 = x^2 - 2bx + b^2$, $AD^2 = aa + xx$. Nun ist AB : AD = BC : CD (§. 187.), und daher $AB^2 : AD^2 = BC^2 : CD^2$ (§. 142.), das ist:

$$a^2 : a^2 + x^2 = b^2 : x^2 - 2bx + b^2$$

$$a^2b^2 + b^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2bx + a^2b^2$$

$$2a^2bx = a^2x^2 - b^2x^2$$

$$\overline{}\; a^2x - b^2x$$

$$2a^2b : (a^2 - b^2) = x.$$

Derowegen ist $CD = x - b = 2a^2b : (a^2 - b^2) - b = (2a^2b - a^2b + b^3) : (a^2 - b^2) = (a^2b + b^3) : (a^2 - b^2)$.

Den Secantem AD findet ihr nun also.

BC : CD = AB : AD (§. 188.).

$$b : \frac{a^2b + b^3}{a^2 - b^2} = a : AD$$

das ist $1 : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = a : AD$,

folglich $AD = (a^3 + ab^2) : (a^2 - b^2)$.

Oder

Oder wenn ihr den Secantem des einfachen Winkels $AC = \sqrt{(a^2 + b^2)} = c$ setzet, so ist $AD = ac^2 : (a^2 - b^2) = ac^2 : (2a^2 - c^2)$.

Auf gleiche Art wird der Tangens des dreyfachen Winkels $BE = (3a^2 b - b^3) : (a^2 - 3b^2)$, und der Secans $AE = c^3 : (a^2 - 3b^2)$ gefunden, u. s. w.

Die 75. Aufgabe.

191. Aus dem gegebenen Inhalte eines rechtwinklichten Triangels ABC und dem Winkel B, die Seiten zu finden. Tab. I. Fig. 8.

Auflösung.

Es sey der Inhalt $= b^2$, $AB = x$
der Sinus Totus $= r$,
der Tangens B $= t$,

so ist $r : t = x : AC$ (§. 6. *Trig.*)
daher $AC = tx : r$.

Folglich:

$$tx^2 : 2r = b^2$$

$$x^2 = (2b^2 r : t)$$

$$x = \sqrt{(2b^2 r : t)}.$$

Machet in dem gegebenen Winkel EDA die Seite $DA = 2b$, und richtet AE perpendicular auf, so ist zugleich $AD = r$, und $AE = t$. Verlängert EA in G, und richtet in D die Perpendicularlinie DG auf; so ist $AG = 2br : t$ (§. 210. *Geom.*). Machet $AH = AG$, und theilet AD in 2 gleiche Theile in I, daß $AI = b$. Werfet über HI einen halben Circul; so ist (§. 210. *Geom.*) $AL = \sqrt{(2b^2 r : t)}$. Machet endlich $AB = AL$, und ziehet aus B die Linie BC mit DE parallel; so ist ABC der verlangte Triangel. Denn, weil $CBA = EDA$ (§. 97. *Geom.*), Tab. II. Fig. 16.

so

so hat der bey A rechtwinklichte Triangel den verlangten Winkel: und da ferner die Seite BA durch die algebraische Rechnung gefunden worden; so ist CAB der verlangte Triangel (§. 81. *Geom.*).

Die 76. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 17. 192. Ob des Renaldini Regel, in einem Circul ein jedes reguläres Vieleck zu beschreiben, richtig sey oder nicht zu untersuchen.

Auflösung.

Die Regel des Renaldini ist diese: wenn man über dem Diameter AB einen gleichseitigen Triangel aufrichtet, den Diameter AB aber in so viele gleiche Theile theilet, als die Peripherie soll getheilet werden, und aus F durch den andern Theilungspunct D die Linie FG ziehet; so ist BG die Seite des verlangten Vielecks. Wir wollen durch das Achteck zeigen, daß die Regel unrichtig ist. Denn in andern Fällen verfähret man auf gleiche Weise. Es sey demnach der halbe Diameter CB $=1$, die halbe Seite des Vierecks $EG=x$, und BG sey die Seite des Achtecks; so ist $CD=\frac{1}{2}$, vermöge der Regel, und $FC=\sqrt{3}$ (§. 162.). Weil nun FCB und CEG rechte Winkel sind, und CDF=GDE (§. 61. *Geom.*); so ist (§. 183. *Geom.*).

$$FC : CD = EG : DE$$

$$\sqrt{3} : \tfrac{1}{2} = x : \frac{x}{2\sqrt{3}}.$$

Daher ist $CE = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+x}{2\sqrt{3}}$, folglich,

weil $CE^2 + EG^2 = CG^2$ (§. 172. *Geom.*)

$$\frac{3 + 2x\sqrt{3} + x^2}{12} + x^2 = 1$$

$\overline{\qquad\qquad\qquad}$ 12 3 +

$3 + 2x\sqrt{3} + 13x^2 = 12$

$13x^2 + 2x\sqrt{3} = 9$

$\overline{}\ 13$

$x^2 + \frac{2}{13}x\sqrt{3} = \frac{9}{13}$

$x^2 + \frac{2}{13}x\sqrt{3} + \frac{3}{13.13} = \frac{9}{13} + \frac{3}{13.13} = \frac{120}{13.13}.$

$\frac{2}{13}\sqrt{3} + x = \frac{1}{13}\sqrt{120} = \frac{2}{13}\sqrt{30}$ (§. 50.)

$x = \frac{2}{13}\sqrt{30} - \frac{1}{13}\sqrt{3}.$

Nun ist aber $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (§. 16. *Trig.*). Derowegen erhellet, daß die Regel des *Renaldini* die halbe Seite des Vierecks unrichtig heraus bringet, wie noch klärer erhellet, wenn man in zehentheiligen Brüchen sowohl aus dem Renaldinischen, als dem wahren Werthe die Wurzel ziehet.

Die 77. Aufgabe.

193. **Einen Circul zu finden, welcher so groß ist, als die Fläche eines gegebenen Cylinders.**

Auflösung.

Es sey der Diameter des Cylinders $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe $= a$; so ist die Fläche $= ap$ (§. 221. *Geom.*). Es sey ferner der Diameter des Circuls $= x$, so ist $d : p = x : (px : d)$. Und demnach die Peripherie des Circuls $px : d$, folglich seine Fläche $px^2 : 4d$ (§. 168. *Geom.*). Derowegen ist

$$px^2 : 4d = ap$$

$$x^2 = 4ad$$

$$x = \sqrt{4ad} = 2\sqrt{ad}$$

oder $\frac{1}{2}x = \sqrt{ad}.$

Der halbe Diameter des verlangten Circuls ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Lehrsatz.

Die Fläche des Cylinders ist gleich einem Circul, dessen Radius die mittlere Proportionallinie ist zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Die 78. Aufgabe.

194. Aus der gegebenen Verhältniß der Höhe eines Cylinders zu seinem Diameter und dem Diameter eines Circuls, welcher seiner Fläche gleich ist, die Höhe des Cylinders und seinen Diameter zu finden.

Auflösung.

Es sey die gegebene Verhältniß $m:n$, der Diameter des Circuls $=d$, seine Peripherie $=p$, die Höhe des Cylinders $=x$; so ist sein Diameter $=nx:m$, und seine Peripherie $=npx:md$, folglich

$$npx^2 : md = \tfrac{1}{4}pd$$

$$x^2 = md^2 : 4n$$

$$x = \sqrt{(md^2 : 4n)}.$$

Tab. II. Fig. 18. Machet AB$=n$, und richtet darauf perpendicular auf BC$=m$. Machet ferner AD$=\frac{1}{2}d$, und richtet in D die Perpendicularlinie DE auf $=md:2n$. Machet endlich DF$=$DE, und beschreibet über AF einen halben Circul; so ist DG$=\sqrt{md^2} : \sqrt{4n}$ (§. 210. *Geom.*).

Die

Die 79. Aufgabe.

195. Aus dem gegebenen Diameter einer Kugel und der Höhe eines Cylinders, welcher ihr gleich ist, den Diameter des Cylinders zu finden.

Auflösung.

Es sey die Höhe des Cylinders $=a$, der Diameter der Kugel $=d$, ihre Peripherie $=p$, der Diameter des Cylinders $=x$; so ist der Inhalt der Kugel $=\frac{1}{6}pd^2$ (§. 237. *Geom.*) die Peripherie des Cylinders $px:d$, sein Inhalt $apx^2:4d$ (§. 221. *Geom.*), und demnach

$$\frac{1}{6}pd^2 = apx^2 : 4d$$

$$\overline{}\ 4d$$

$$\frac{4}{6}pd^3 = apx^2$$

$$\overline{}\ ap$$

$$2d^3 = x^2$$

$$\overline{}$$

$$3a$$

$$\overline{}$$

$$\sqrt{(2d^3:3a)} = x.$$

Es wird also der Werth von x eben wie in der vorhergehenden Aufgabe gefunden. Nämlich man macht $AB=a$, $BC=\frac{2}{3}d$, und $AD=d$; so ist $DE=DF=2d^2:3a$, folglich $DG=\sqrt{(2d^3:3a)}$. Tab. II. Fig. 18.

Die 80. Aufgabe.

196. Aus dem gegebenen Diameter und der Höhe eines Coni, den Diameter eines Cylinders zu finden, welcher ihm, der Höhe und dem Inhalte nach, gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter des Coni $=d$, die Höhe $=a$, der Diameter des Cylinders $=x$, die Verhältniß des Diametri zur Peripherie $=d:p$; so ist der Inhalt des Coni $=\frac{1}{12}adp$ (§. 229. *Geom.*), die Peripherie des Cylinders $px:d$, und sein Inhalt $apx^2:3d$ (§. 221. *Geom.*), folglich

$$\frac{1}{12}adp = apx^2 : 4d \qquad 4d$$

$$\frac{1}{3}ad^2p = apx^2 \qquad ap$$

$$\frac{1}{3}d^2 = x^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = x.$$

Beschreibet auf dem Diameter des Kegels d einen gleichseitigen Triangel, und um denselben einen Circul; dieser ist viermal so groß als die Grundfläche des Cylinders (§. 164.), folglich, wenn um den Radium dieses Circuls ein anderer beschrieben wird; so ist derselbe Radius der verlangte Diameter des Cylinders.

Die 81. Aufgabe.

197. Aus dem gegebenen Diameter eines Coni und seiner Höhe, den Diameter einer Kugel zu finden, welche ihm gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter der Grundfläche des Coni $=d$, seine Peripherie $=p$, die Höhe $=a$, der Diameter der Kugel $=x$; so ist der Inhalt des Coni $=\frac{1}{12}adp$ (§. 229. *Geom.*), hingegen der Inhalt der Kugel $px^3:6d$ (§. 237. *Geom.*).

Dero=

Derowegen ist

$$\frac{1}{12}adp = px^3 : 6d$$

$$\frac{1}{2}ad^2 = x^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}ad^2} = x.$$

Anmerkung.

198. Bisher habe ich in leichten geometrischen Exempeln den Nutzen der Algebra gezeigt: nun aber wird es Zeit seyn, daß ich darthue, wie man in der höhern Geometrie mit sonderbarem Vortheile, sich derselben bediene. Es handelt aber die höhere Geometrie von den krummen Linien. Derowegen soll ich zeigen, wie man durch Hülfe der Algebra die Eigenschaften der krummen Linien finden kann. Zwar dienet darzu hauptsächlich die Differential- und Integralrechnung, von welcher in dem andern Theile gehandelt werden soll: Allein man kann auch durch die gemeine Algebra gar viel ausrichten. Damit ihr aber verstehen möget, was hinfort beygebracht werden soll; so muß überhaupt etwas von den krummen Linien angeführet werden. Bildet euch aber nicht ein, als wenn diese Betrachtung ganz fruchtlos wäre. Vielmehr versichert euch, daß sie denenjenigen sehr zu statten kommt, welche die Geheimnisse der Natur und Kunst genauer als andere einzusehen belieben. Ich würde jetzt vergeblich reden, wenn ich einen weitläuftigen Beweis davon führen wollte. Hier merket nur überhaupt, daß man gewohnt ist, die krummen Linien durch algebraische Gleichungen zu erklären, welche die Relation gewisser geraden Linien, welche man innerhalb denselben ziehen kann, gegen einander andeuten. Z. E. Es sey AMB ein halber Circul, und in demselben PM auf dem Diameter AB perpendicular. Setzet $AB = a$, Tab. II.
$AP = x$, so ist $PB = a - x$; es sey ferner $PM = y$; so ist beständig $y^2 = ax - xx$ (§. 210. *Geom.* & §. 137. *Algebr.*). Fig. 19.
Derowegen drucket die Gleichung die Relation aus, welche die Linie PM zu AP in allen Puncten der Peripherie AMB hat. Und darum nennet man sie die Erklärung des Circuls. Oder es sey $AC = a$, $PC = x$, $PM = y$; so ist $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 172. *Geom.*). Derowegen drucket diese Gleichung die Relation aus, welche PM und PC in allen

Puncten der Peripherie gegen einander haben. Und also nennet man sie eine Erklärung des Circuls. Gleichwie nun aber alles, was von der Sache erkannt werden kann, aus ihrer Erklärung hergeleitet wird (§. 2. Meth. Math.); so pflegt man aus dergleichen Gleichungen durch die Algebra die Eigenschaften der krummen Linien herzuleiten.

Von den krummen Linien.

Die 13. Erklärung.

Tab. II. Fig. 20. 199. Die Linie AX, welche alle gerade Linien MM, welche mit einander innerhalb einer krummen Linie parallel gezogen werden, in zween gleiche Theile PM und PM theilet, wird der Diameter und insonderheit die Axe genennet, wenn sie mit eben den Linien einen rechten Winkel macht.

Die 14. Erklärung.

200. Die Linien MM werden die Ordinaten; ihre Hälften aber PM die Semiordinaten genennet.

Die 15. Erklärung.

201. Hingegen die Abscisse PA ist das Stück des Diameters oder der Axe, welches die Ordinaten MM abschneiden.

Die 16. Erklärung.

Tab. II. Fig. 20. 202. Der Scheitel der krummen Linie ist der Punct A, worinnen sich die Axe oder auch der Diameter AX endet.

Die 17. Erklärung.

203. Eine algebraische Linie wird genennet; deren Natur durch eine algebraische Gleichung sich erklären läßt.

Die

Die 1. Anmerkung.

204. Durch die algebraischen Gleichungen verstehen wir diejenigen, welche einerley Grad haben in allen Puncten der krummen Linie. Dergleichen ist die Gleichung des Circuls $y^2 = ax - x^2$, oder auch $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 198.).

Die 2. Anmerkung.

205. Man nennet insgemein mit dem *des Cartes* die algebraischen Linien **geometrische Linien**; allein, wir sind bey der Benennung des Herrn von Leibnitz geblieben, mit welchem auch der große Engelländische Geometra *Newton* übereinstimmet, welcher (in Arithm. Univ. p. 280.) wohl erinnert, daß nicht die Gleichung Ursache sey, warum man eine krumme Linie zur Auflösung der Fragen in die Geometrie nehmen solle, sondern es solle vielmehr darum geschehen, weil sie sich leicht beschreiben läßt.

Die 18. Erklärung.

206. Eine transcendentische Linie wird genennet, deren Natur durch keine algebraische Gleichung sich erklären läßt.

Anmerkung.

207. Insgemein nennet man die transcendentischen Linien, mechanische Linien, abermals mit dem *des Cartes*, und wirft solchergestalt viel Linien aus der Geometrie, welche sich leicht beschreiben lassen: welches wir mit dem Herrn von Leibnitz mit Recht misbilligen, welcher eine besondere Art der Gleichungen für diese Linien erfunden hat, durch welche ihre Eigenschaften sowohl als algebraischen Linien heraus gebracht werden.

Die 19. Erklärung.

208. Alle algebraischen Linien werden zu einem Geschlechte gerechnet, da die Glieder der Gleichungen auf gleiche Abmessungen steigen. Da nun die Gleichung für eine gerade Linie allein eine Abmessung haben kann, so nennet man

eine Linie von dem ersten Geschlechte, wenn die Glieder der Gleichung zwo Abmessungen haben: sind derselben drey, so ist es eine Linie von dem andern Geschlechte: sind ihrer vier, eine Linie von dem dritten Geschlechte u. s. w.

Anmerkung.

209. Die Gleichung für den Circul ist $y^2 = ax - x^2$, oder auch $a^2 - x^2 = y^2$. Demnach ist der Circul eine Linie von dem ersten Geschlechte. Wiederum, wenn $ax = y^2$ die Natur einer krummen Linie erkläret; so ist dieselbe abermal eine von dem ersten Geschlechte. Hingegen, wenn die Erklärung der krummen Linie $a^2x = y^3$ ist, so ist sie eine Linie von dem andern Geschlechte.

Die 20. Erklärung.

210. Die algebraischen Linien rechnen wir zu einer Familie, in deren Gleichungen alle Glieder bis auf die Exponenten der Dignitäten mit einander übereinkommen.

Die 1. Anmerkung.

211. Demnach gehören die krummen Linien, deren Natur durch die Gleichungen $ax = y^2$, $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$ erkläret wird, zu einer Familie.

Zusatz.

212. Die krummen Linien können alle unter eine Gleichung gebracht werden, welche zu einer Familie gehören, wenn man nämlich für die determinirten Exponenten undeterminirte setzet.

Die 2. Anmerkung.

213. Solchergestalt sind alle krummen Linien, welche sich durch $ax = y^2$, $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$ u. s. w. erklären lassen, unter dieser Gleichung enthalten, $a^{m-1}x = y^m$ oder, wenn $a = 1$ angenommen wird, $x = y^m$.

Die

Die 3. Anmerkung.

214. Solchergestalt könnet ihr alle algebraischen Linien für eine große Familie rechnen, welche aus unendlich kleinern bestehet, deren jede unendliche Geschlechter hat. Denn, weil in allen Gleichungen, wodurch die Natur der krummen Linien erkläret wird, entweder eine gewisse Dignität der Abscisse und Ordinate bloß durch bekannte Größen, oder zugleich verschiedene Dignitäten derselben in einander, oder auch für einige Glieder lauter bekannte Größen in einander multipliciret werden, alle Gleichungen aber sich auf o solviren, wenn man alle Glieder auf eine Seite setzt; (als anstatt $ax=y^2$ könnet ihr sagen $y^2-ax=o$) so wird eine Generalgleichung für alle algebraischen Linien seyn $ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = o$. Man setzt überall das Zeichen +, weil die Zeichen auf gar viele Arten verändert werden können.

Die 4. Anmerkung.

215. Diese Eintheilung der Linien in ihre Geschlechter und Familien hat ihren Nutzen, und dienet die letzte sonderlich dazu, daß wir dasjenige, was vielen Linien gemein ist, auf einmal erkennen. Die erstere Eintheilung ist zu dem Ende aufgebracht worden, daß man eine Wahl der Linien anstellen könnte, wenn man einige zu Auflösung einer Aufgabe aussuchen soll; wovon ich an seinem Orte reden will.

Die 5. Anmerkung.

216. Unter den krummen Linien sind sonderlich diejenigen vor andern berühmt, welche aus geschickter Zerschneidung eines Kegels oder Coni entstehen, und daher von den Alten *Sectiones Conicæ* oder Kegelschnitte genennet worden sind. Denn, weil sie die Alten nebst dem Circul allein in die Geometrie nahmen; so haben sie auch viel von ihren Eigenschaften geschrieben, und die neuern haben noch ein mehreres dazu gefunden. Derowegen wollen auch wir ihre vornehmsten Eigenschaften durch algebraische Rechnungen untersuchen, und zu dem Ende vor ihre Erklärungen algebraische Gleichungen annehmen. Es sind aber dieser Linien drey, nämlich die *Parabola*, die *Ellipsis* und die *Hyperbola*. Merket hier einmal für allemal, daß wir beständig die Abscisse x und die halbe Ordinate y nennen wollen.

Die 21. Erklärung.

217. Die *PARABOLA* ist eine krumme Linie, in welcher $ax = y^2$, das ist, in welcher das Quadrat der halben Ordinate dem Rectangulo aus der Absciſſe in eine beständige Linie gleich ist, welche der Parameter genennet wird.

Der 1. Zusatz.

218. Derowegen ist in der Parabel $a = y^2 : x$, das ist, der Parameter ist die dritte Proportionallinie zu einer jeden Absciſſe und der ihr zugehörigen halben Ordinate.

Der 2. Zusatz.

219. Es ist ferner $\sqrt{ax} = y$, das ist, die halbe Ordinate ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Parameter und der ihr zugehörigen Absciſſe.

Der 3. Zusatz.

Tab. II. Fig. 21. 220. Solchergestalt könnet ihr eine Parabel beschreiben, wenn deren Parameter gegeben wird. Traget nämlich auf die Linie AX den Parameter BA, und ziehet durch A die Linie CD auf AX perpendicular. Beschreibet nach Gefallen Circul, welche einander in B berühren, und die Linie BX in P, die Linie CD in 1. 2. 3. 4. 5. durchschneiden. Durch P ziehet Linien I. I, II. II, III. III, u. s. w. mit CD parallel, und laſſet auf dieselben aus 1. 2. 3. u. s. w. Perpendicularlinien 1. I, 2. II, 3. III, u. s. w. herunter fallen, oder, welches gleich viel ist, machet PI = A1, PII = A2, PIII = A3 u. s. w. so sind die Puncte I, II, III u. s. w. in der Parabel. Denn es sey AB = a, AP = x, A3 = PIII = y; so ist $y^2 = ax$ (§. 210. *Geom.*), und also der Punct III in der Parabel (§. 217.).

Der 4. Zusatz.

221. Ihr könnet auch in einer jeden Parabel einen verlangten Punct geometrisch determiniren. Z. E. Ihr wolltet wissen, ob M recht in der Parabel sey. Lasset aus M in P einen Perpendicul fallen, und traget aus P in B den Parameter. Werfet über BA einen halben Circul, wenn er durch den Punct M gehet, so ist er in der Parabel (§. 210. *Geom.* & §. 217. *Algebr.*). Tab. III. Fig. 22.

Der 5. Zusatz.

222. Endlich ist $x = y^2 : a$, das ist, die Abscisse ist die dritte Proportionallinie zu dem Parameter und der halben Ordinate. Daher, wenn AB der Parameter ist, und BAQN ein Rectangulum; wenn man ferner NM mit BP parallel ziehet, und auf AN die Linie AM perpendicular aufrichtet; so ist der Punct M in der Parabel. Denn in dem bey A rechtwinklichten Triangel NAM ist NQ : QA = QA : QM, das ist, AB : PM = PM : AP, oder $a : y = y : x$. Tab. III. Fig. 23.

Der 6. Zusatz.

223. Die erklärte Parabel (welche man die Apollonische zu nennen pflegt, weil Apollonius Pergæus unter den Alten gründlich von ihr geschrieben hat) ist eine Linie von dem ersten Geschlechte (§. 208.).

Der 7. Zusatz.

224. Wenn ihr demnach $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$, $a^4x = y^5$ &c. setzet, so habt ihr Parabeln von dem andern, dritten, vierten ꝛc. Geschlechte. Und daher erkläret $a^{m-1}x = y^m$ eine ganze Familie unendlicher Geschlechter der Parabeln. Gleichergestalt, wenn ihr $ax^2 = y^3$, $ax^3 = y^4$, $ax^4 = y^5$ &c. setzet; so

habt ihr noch andere Arten der Parabeln von dem andern, dritten, vierten Geschlechte, welche alle unter der Gleichung $ax^{m-1}=y^m$ begriffen sind. Beyde Familien gehören unter diese Gleichung, nebst unendlich vielen andern Linien $a^n x^m = y^{n+m}$.

Der 8. Zusatz.

Tab. III. Fig. 23.

225. Wenn ihr auf die Sehne AM der Parabel von dem ersten Geschlechte einen Perpendicul AR aufrichtet, welcher die Semiordinate PM, wenn sie verlängert wird, in R durchschneidet; so ist der Punct R in der Parabel von dem andern Geschlechte. Denn wegen des rechten Winkels bey A ist PM:AP=AP:PR (§. 210. *Geom.*), und daher $PM^2:AP^2=AP^2:PR^2$, oder $PM^2:SR^2=SR^2:AS^2$ (§. 142.). Wenn ihr demnach AB $=a$, AP=SR$=y$, und PR=SA$=x$ setzet; so habt ihr $ay:y^2=y^2:x^2$, folglich $y^3=ax^2$.

Die 1. Anmerkung.

226. Auf gleiche Weise wird vermittelst der Parabel von dem andern Geschlechte, die von dem dritten und so weiter unendlich fort, gefunden, wie ich in den Actis Eruditorum des 1717ten Jahres gezeigt habe.

Der 9. Zusatz.

Tab. III. Fig. 24.

227. Wenn ihr AS dem Parameter gleich machet, und RS in S perpendicular aufrichtet, dann aus S in R die halbe Ordinate QM traget, und endlich aus A durch R die Linie AN ziehet; so ist N ein Punct in der Parabel von dem andern Geschlechte, in welcher $y^2=a^2x$. Denn es sey AQ $=y$, AS$=a$; so ist QM=SR$=y^2:a$, folglich, da AS:SR=AQ:QN, das ist, $a:\frac{y^2}{a}=y:x$; so findet ihr $a^2x=y^3$, oder $a^2.QN=AQ^3$.

Die

Die 2. Anmerkung.

228. Auf gleiche Weise wird, vermittelst der Parabel von dem andern Geschlechte, die von dem dritten und so weiter unendlich fort, gefunden, wie ich gleichfalls in den Actis Eruditorum A. 1717. gezeigt habe.

Die 22. Erklärung.

229. Der Brennpunct (Focus) ist der Punct in der Axe, wo der Parameter die Ordinate abgiebt.

Die 82. Aufgabe.

230. Die Weite des Brennpuncts F von der Scheitel A zu finden. Tab. III. Fig. 25.

Auflösung.

Es sey AF$=x$, der Parameter $=a$, so ist FR$=\frac{1}{2}a$ (§. 229.), folglich

$$\frac{1}{4}a^2 = ax$$

$$\overline{}$$

$$\frac{1}{4}a = x.$$

In der Parabel ist die Weite des Brennpuncts F von der Scheitel A dem vierten Theile des Parameters gleich. Tab. III. Fig. 25.

Die 83. Aufgabe.

231. Die Verhältniß zu finden, welche die Ordinaten gegen einander haben.

Auflösung.

Es sey der Parameter $=a$, AP$=x$, Ap$=v$, PM$=y$, pm$=z$, so ist $y^2=ax$, und $z^2=av$ (§. 217.), folglich $y^2 : z^2 = ax : av = x : v$ (§. 144.). Demnach ist PM^2 : pm^2 = AP : Ap, das ist: Tab. III. Fig. 22.

In der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die Abscissen.

Die

Die 84. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 12. 232. Die Größe des Rectanguli aus der Summe zwoer halben Ordinaten PM+pm in ihre Differenz Rm, zu finden.

Auflösung.

$$\left.\begin{array}{r} pm+PM=\sqrt{av}+\sqrt{ax} \\ mR=\sqrt{av}-\sqrt{ax} \end{array}\right\} \text{§. 219.}$$

$$(pm+PM)mR=av-ax=a(v-x).$$

Das Rectangulum aus der Summe zwoer halben Ordinaten in ihre Differenz ist gleich dem Rectangulo aus dem Parameter in die Differenz der zugehörigen Abscissen.

Zusatz.

233. Derowegen verhält sich der Parameter zu der Summe zwoer halben Ordinaten, wie ihre Differenz zu der Differenz der Abscissen.

Die 85. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 22. 234. Die Verhältniß der Sehnen AM und Am zu finden, welche aus der Scheitel der Parabel A gegen das Ende der Ordinaten gezogen werden.

Auflösung.

Weil $PM^2=ax$, $AP^2=x^2$; so ist $AM^2=ax+x^2$ (§. 172. *Geom.*). Wiederum, wenn ihr AP $=v$ setzet; so ist $AM^2=av+v^2$. Derowegen ist

$$AM^2:Am^2=ax+x^2:av+v^2$$
$$=(a+x)x:(a+v)v.$$

Die Quadrate der Sehnen AM und Am verhalten sich in der Parabel, wie die Rectangula aus den Abscissen in die Aggregate der Abscissen und des Parameters.

Die

Die 86. Aufgabe.

235. Die Größe der Linie FM zu finden, welche aus dem Brennpuncte an das Ende einer Ordinate M gezogen wird. Tab. III. Fig. 25.

Auflösung.

Es sey der Parameter $=a$, AP$=x$, so ist AF$=\frac{1}{4}a$ (§. 230.), PF$=x-\frac{1}{4}a$, folglich

$$PF^2=x^2-\tfrac{1}{2}ax+\tfrac{1}{16}a^2$$
$$PM^2=\quad ax \qquad (\S.\ 217.)$$
$$FM^2=x^2+\tfrac{1}{2}ax+\tfrac{1}{16}a^2 \ (\S.\ 172.\ Geom.).$$
$$FM=x+\tfrac{1}{4}a.$$

Die gerade Linie FM, welche aus dem Brennpuncte F einer Parabel, gegen das Ende ihrer Ordinate M gezogen wird, ist gleich der Summe aus der Abscisse und der Weite des Brennpuncts von der Scheitel.

Der 1. Zusatz.

236. Wenn ihr den vierten Theil des Parameters aus A in F und in f traget, durch AX so viel Parallellinien MM ziehet, als euch gefällt, und aus F mit der Weite Pf die Puncte M beyderseits abschneidet; so könnet ihr abermal die Parabel beschreiben. Tab. III. Fig. 25.

Der 2. Zusatz.

237. Ihr könnet auch dieses durch die Bewegung verrichten. Denn, nehmet, wie vorhin, auf der Axe Af$=$AF$=\frac{1}{4}a$. Befestiget in f ein Lineal DC dergestalt, daß es in f mit fX einen rechten Winkel macht. Nehmet ein Winkelmaaß IGH, und befestiget an seinem einem Ende H einen Faden, Tab. III. Fig. 26.

den, welcher ihm gleich ist; das andere Ende aber des Fadens bindet an einen Nagel, welchen ihr in dem Brennpuncte F eingeschlagen habt: Wenn ihr einen Stift an das Winkelmaaß IGH haltet, und es an dem Lineale DC verschiebet; so wird sich die Parabel beschreiben. Denn, es ist beständig FM $= AP + Af = x + \frac{1}{4}a$, und daher M ein Punct in der Parabel (§. 235.).

Anmerkung.

Tab. III. Fig. 22. 238. Auf ebenmäßige Art könnet ihr die Eigenschaften der Parabeln von höheren Geschlechtern untersuchen. Wollet ihr aber diejenigen haben, welche allen Parabeln gemein sind, so dürfet ihr nur die allgemeine Gleichung für ihre ganze Familie annehmen. Denn weil $a^{m-1}x = y^m$, so ist auch $a^{m-1}v = z^m$, folglich $PM^m : pm^m = AP : Ap$. Wiederum, weil $PM + pm = \sqrt[m]{a^{m-1}x} + \sqrt[m]{a^{m-1}v}$, $mR = \sqrt[m]{a^{m-1}v} - \sqrt[m]{a^{m-1}x}$; so ist $(PM + pm).mR = \sqrt[m]{a^{2m-2}v^2}$
Tab. III. Fig. 25. $- \sqrt[m]{a^{m2-2}x^2}$. Weil $FR = \frac{1}{2}a$; so ist $a^m : 2^m = a^{m-1}x$, folglich $x = a : 2^m = AF$. Derowegen kommt in den Parabeln von dem höheren Geschlechte der Brennpunct dem Scheitelpuncte immer näher, wenn sie einen Parameter haben.

Die 23. Erklärung.

Tab. III. Fig. 27. 239. Die *ELLIPSIS* ist eine krumme Linie, in welcher sich verhält das Rectangulum aus den Theilen der Axe AP und PB, zu dem Quadrate ihrer halben Ordinate PM, wie die Axe AB zu einer unveränderlichen Linie, welche ihr Parameter genennet wird: das ist, wenn ihr $AB = a$, den Parameter $= b$, $PM = y$, und AP $= x$ setzet, in welcher $ay^2 = abx - bx^2$.

Der 1. Zusatz.

240. Derowegen ist $y^2 = bx - bx^2 : a$, das ist, das Quadrat der halben Ordinate ist gleich einem

Rectan-

Rectangulo aus der Abscisse in den Parameter, weniger ein Rectangulum aus eben dieser Abscisse in die vierte Proportionallinie zu der Axe, dem Parameter und der Abscisse.

Der 2. Zusatz.

241. Weil $ay^2 = abx - bx^2$, so ist

$$bx^2 : (bx - y^2) = a.$$

Demnach könnet ihr in einer Ellipsi aus dem gegebenen Parameter, der Abscisse und der halben Ordinate, die Axe folgendergestalt finden. Suchet zu $PE = b$, $PM = PF = y$ die dritte Proportionallinie $PG = y^2 : b$. Machet $AP = x$, und $PH = PG$; so ist $AH = x - y^2 : b = (bx - y^2) : b$. Machet ferner $AI = AH$, und $AL = AP = x$, und ziehet LB mit IP parallel; so ist $AB = a$, oder die verlangte Axe. Tab. III. Fig. 28.

Der 3. Zusatz.

242. Wiederum, weil $ayy = abx - bxx$, so ist $b = ayy : (ax - x^2)$, und daher könnet ihr in einer gegebenen Ellipsi den Parameter also finden: Richtet in B die Perpendicularlinie BE auf, und ziehet aus A durch M die Linie AE, so ist $BE = ay : x$ (§. 184. *Geom.*). Machet $BG = PM$, und ziehet die Linie PE, und mit ihr GH parallel; so ist $BH = ay^2 : (ax - x^2) = b$ (§. *cit.*), das ist, der verlangte Parameter. Tab. III. Fig. 29.

Der 4. Zusatz.

243. Weil $yy = (abx - bxx) : a$, so ist $y = \surd(bx - bxx : a)$. Derowegen, wenn euch die Axe und der Parameter gegeben werden, so könnet ihr für jede Abscisse ihre gehörige halbe Ordinate folgendergestalt finden. Suchet zu der Axe $AB = a$, dem Parameter $BC = b$, und der Abscisse $AP = x$ Tab. III. Fig. 30.

die vierte Proportionallinie PD$=bx:a$. Ziehet DE mit AB parallel; so ist CE$=b-bx:a$. Machet PF=CE, und beschreibet über AF einen halben Circul; so ist PM$=\sqrt{(bx-bx^2:a)}=y$, das ist, die verlangte halbe Ordinate.

Die 87. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 27. 244. Die Weite des Brennpuncts AF von der Scheitel A zu finden.

Auflösung.

Es sey AB$=a$, der Parameter $=b$, AF$=x$, so ist FR$=\frac{1}{2}b$ (§. 229.), und

$$\frac{1}{4}ab^2=abx-bxx \text{ (§. 239.)}.$$

$$x^2-ax=-\frac{1}{4}ab$$

$$x^2-ax+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}ab$$

$$\frac{1}{2}a-x=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}ab)}$$

$$\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}ab)}=x.$$

Traget aus B in E $\frac{1}{2}b$; so ist CE$=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$. Beschreibet über AE einen halben Circul, welcher die in dem Mittelpuncte C aufgerichtete Perpendicularlinie CD in G durchschneidet; so ist GC$=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}ab)}$. Machet CF=GC; so ist in F der Brennpunct.

Zusatz.

245. Also ist die Weite des Brennpuncts von dem Mittelpuncte C$=\sqrt{(\frac{1}{4}aa^2-\frac{1}{4}ab)}$, das ist die mittlere Proportionallinie zwischen $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$.

Die 24. Erklärung.

Tab. III. Fig. 27. 246. Die Perpendicularlinie DC, welche die größere Axe AB in zween gleiche Theile theilet, ist die halbe kleine Axe.

Die

Die 88. Aufgabe.

247. Aus dem gegebenen Parameter und der großen Axe AB, die halbe kleine Axe CD zu finden. Tab. III. Fig. 27.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, AB $= a$, CD $= \frac{1}{2}z$, so ist

$$\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}z^2 = a : b \text{ (§. 239.).}$$

$$z^2 = ab$$

$$z = \sqrt{ab}.$$

das ist:

Die kleine Axe in der Ellipsi ist die mittlere Proportionallinie zwischen der großen und dem Parameter.

Der 1. Zusatz.

248. Derowegen ist der Parameter die dritte Proportionallinie zu der großen und kleinen Axe.

Der 2. Zusatz.

249. Wenn die Weite des Brennpuncts von der Scheitel AF $= x$ ist; so ist $ax - xx = \frac{1}{4}ab$ (§. 244.). Derowegen ist das Rectangulum aus der Weite des Brennpuncts von der Scheitel AF in ihr Complement zur großen Axe FB dem Rectangulo aus der großen Axe in den vierten Theil des Parameters gleich. Tab. III. Fig. 27.

Die 89. Aufgabe.

250. Die Verhältniß zu finden, welche die halben Ordinaten PM und pm in der Ellipsi gegen einander haben. Tab. III. Fig. 27.

Auflösung.

Es sey AB$=a$, der Parameter $=b$, AP$=x$, PM$=y$, Ap$=z$, pm$=v$, so ist

$$\left.\begin{array}{l} yy=bx-bx^2:a \\ v^2=bz-bz^2:a \end{array}\right\} \text{(§. 240.)}.$$

Derowegen ist $y^2:v^2=abx-bx^2:abz-bz^2=ax-x^2:az-z^2=(a-x)x:(a-z)z$, das ist, PM^2:pm^2 =PB.AP:pB.Ap, nämlich

In der Ellipsi verhalten sich die Quadrate der halben Ordinaten, wie die Rectangula aus den Theilen der Axe.

Der 1. Zusatz.

251. Derowegen ist auch DC^2:PM^2=CB^2:AP.PB, folglich DC^2:CB^2=PM^2:AP.PB (§. 142.), das ist, das Quadrat der halben kleinen Axe verhält sich zu dem Quadrate der halben großen, wie das Quadrat der halben Ordinate zu dem Rectangulo aus den Theilen der Axe.

Der 2. Zusatz.

Tab. III. Fig. 27. 252. Setzet demnach CP$=x$, so ist AP$=\frac{1}{2}a-x$, PB$=\frac{1}{2}b+x$, folglich $\frac{1}{4}ab:\frac{1}{4}a^2=y^2:\frac{1}{4}a^2-x^2$ Derowegen ist

$$ay^2=\tfrac{1}{4}a^2b-bx^2$$

$$y^2=\tfrac{1}{4}ab-bx^2:a.$$

Der 3. Zusatz.

253. Es sey CD$=d$, AC$=r$, PC$=x$; so ist AP$=r-x$, und PB$=r+x$, folglich AP.PB$=r^2-x^2=$AC$^2-$PC^2, und daher

$$d^2:r^2=y^2:r^2-x^2$$

$$y^2=a^2(r^2-x^2):r^2.$$

Also

Also habt ihr noch eine andere Gleichung, welche die Natur der Ellipsis erkläret.

Die 90. Aufgabe.

254. Die Größe der Linie zu determiniren, welche aus dem Brennpuncte f an das Ende D der kleinen Axe gezogen wird. Tab. III. Fig. 27.

Auflösung.

Es sey der Parameter $=b$, AB$=a$, so ist $fC^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ab$ (§. 245.), und $DC^2 = \frac{1}{4}ab$ (§. 247.), folglich $fD^2 = \frac{1}{4}a^2$ (§. 172. *Geom.*). Dannenhero $fD = \frac{1}{2}a = CB$.

Zusatz.

255. Wenn euch die kleine und große Axe gegeben werden, so könnet ihr die Brennpuncte f und F gar leicht finden. Denn, theilet die große Axe AB in zween gleiche Theile in C, und richtet aus C die halbe kleine Axe CD perpendicular auf; so könnet ihr aus D mit der halben großen Axe CB die Brennpuncte F und f determiniren. Tab. III. Fig. 27.

Die 91. Aufgabe.

256. Die Größe der geraden Linien FM und fM zu finden, welche aus beyden Brennpuncten F und f an das Ende M einer Semiordinate PM gezogen werden. Tab. III. Fig. 31.

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin, nur $FC = fC = c$; so ist $PC = \frac{1}{2}a - x$, $Pf = c + \frac{1}{2}a - x$, $PF = c - \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$, $Pf^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$. Nun ist (§. 251.)

$$BC^2 : DC^2 = AP.PB : PM^2$$

das ist, $\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - x^2 : PM^2$

$$1 : 1 - \frac{4c^2}{a^2}$$

Solchergestalt ist

$$PM^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$$
$$PF^2 = cc - ac + 2cx + \tfrac{1}{4}aa - ax + xx$$

$$FM^2 = cc - ac + 2cx + \tfrac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a$$

$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a.$$

Wiederum:

$$PM^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$$
$$Pf^2 = cc + ac - 2cx + \tfrac{1}{4}aa - ax + xx$$

$$fM^2 = c^2 + ac - 2cx + \tfrac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$fM = \tfrac{1}{2}a + c - 2cx : a$$
$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

$fM + FM = a = AB$, nämlich:

In der Ellipsi sind die beyden Linien fM und FM, welche aus den Brennpuncten F und f, an einen Punct M in der Peripherie gezogen werden, zusammen genommen, der großen Axe AB gleich.

Zusatz.

Tab. III. Fig. 31. 257. Daher könnet ihr gar leicht aus der gegebenen großen und kleinen Axe die Ellipsin beschreiben. Denn, suchet die Brennpuncte F und f, und schlaget in ihnen zween Nägel ein. Bindet an die Nägel einen Faden FMf, welcher so lang ist als die große Axe AB. Dehnet den Faden mit einem Stifte aus, und führet den Stift an dem Faden herum, so wird die Ellipsis beschrieben.

Die 1. Anmerkung.

258. Ausser der Ellipsi des Apollonii, welche von dem ersten Geschlechte ist, könnet ihr noch unzählich viele andere von höhern Geschlechtern erdenken, welche unter der allgemeinen Gleichung begriffen werden: $ay^{m+n} = bx^m(a-x)^n$. Es ist nämlich wie der Parameter zu der großen Axe, also die Dignität der halben Ordinate, deren Exponent den Exponenten der Dignitäten von den Theilen der Axe zusammen gleich ist, zu dem Producte aus diesen Dignitäten. Z. E. In der Ellipsi von dem andern Geschlechte ist $b:a=y^3:x^2(a-x)$; in der Ellipsi von dem vierten Geschlechte $b:a=y^4:x^2(a-x)^2$.

Die 2. Anmerkung.

259. Wenn die große Axe der kleinen gleich wird, so wird aus der Ellipsi ein Circul. Denn alsdenn ist $\frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}a^2$ (§. 247.), und daher $b=a$, folglich anstatt $ay^2 = abx - bx^2$ bekommet ihr $ay^2 = a^2x - ax^2$, das ist, $y^2 = ax - xx$, welche Gleichung den Circul erkläret. Wie man nun aber Ellipses von höhern Geschlechtern hat, also giebt es auch Circul von höhern Geschlechtern, wenn ihr nämlich setzet $AP^m : PM^m = PM : PB$, das ist, $x^m : y^m = y : a-x$. Tab. II. Fig. 19. Also ist die Gleichung für unendliche Circul $ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$. Z. E. Wenn $m=1$, so ist $ax - x^2 = y^2$ für den Circul des ersten Geschlechtes; ist $m=4$, so ist $ax^4 - x^5 = y^5$ die Gleichung für den Circul von dem vierten Geschlechte.

Die 25. Erklärung.

260. **Die Hyperbel ist eine krumme Linie, in welcher $ay^2 = abx \mp bxx$, das ist, wie eine unveränderliche Linie b, welche der Parameter heisset, zu einer andern unveränderlichen Linie a, welche die Zwerchaxe** (Axis transversus) **genennet wird, so das Quadrat der Semiordinate y^2 zu dem Rectangulo aus der Summe der Abscisse und Zwerchaxe $a \mp x$ in die Abscisse x.**

Zusatz.

261. Derowegen ist $y^2 = bx + bx^2 : a$, $b = ay^2 : (ax + xx)$, $a = bx^2 : (y^2 - bx)$ u. s. w. wie in der Ellipsi, nur daß ihr das Zeichen + anstatt des Zeichens — habet.

Die 26. Erklärung.

262. Weil die Gleichung der Hyperbel mit der Gleichung für die Ellipsin übereinkommt, nur, daß sie bloß in dem einen Zeichen von ihr unterschieden ist; so nennet man auch hier die mittlere Proportionallinie zwischen der Zwerchaxe und dem Parameter, die kleine Axe.

Die 27. Erklärung.

Tab. IV. Fig. 32. 263. Wenn ihr die Axe der Hyperbel AX über ihre Scheitel A verlängert, und AB der Zwerchaxe gleich machet, so heißt der Punct C, durch welchen AB in zween gleiche Theile getheilet wird, der Mittelpunct.

Die 92. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 32. 264. Aus dem gegebenen Parameter und der Zwerchaxe AB, die Weite des Brennpuncts F von der Scheitel A, zu finden.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, AB$= a$; so ist FR$= \frac{1}{2}b$ (§. 229. 260.).

$$b : a = \tfrac{1}{4}bb : ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}abb = abx + bxx$$

$$\text{———————— } b$$

$$\tfrac{1}{4}ab = ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}aa + ax + xx$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} = \tfrac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} - \tfrac{1}{2}a = x.$$

Ma-

Machet BE$=\frac{1}{2}b$, so ist EC$=\frac{1}{2}a\mp\frac{1}{2}b$. Richtet in C einen Perpendicul auf, und beschreibet über EA einen halben Circul; so ist CG $=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 \mp\frac{1}{4}ab)}$. Machet CF=CG; so ist in F der Brennpunct. Tab. IV Fig. 32.

Der 1. Zusatz.

265. Also ist die Weite des Brennpunctes von dem Mittelpuncte FC$=\sqrt{(\frac{1}{4}aa\mp\frac{1}{4}ab)}$.

Der 2. Zusatz.

266. Weil $ax\mp xx=\frac{1}{4}ab$, und $ax\mp xx=$AF.FB; hingegen $\frac{1}{4}ab$ das Quadrat der halben kleinen Axe CD (§. 262.); so ist AF.FB$=$CD^2.

Die 93. Aufgabe.

267. Die Verhältniß zu finden, welche die Semiordinaten PM und pm gegen einander haben. Tab. IV. Fig. 32.

Auflösung.

Es sey die Zwerchaxe AB$=a$, der Parameter $=b$, AP$=x$, PM$=y$, Ap$=v$, pm$=z$, so ist $y^2:z^2=(bx\mp bxx:a):(bv\mp bv^2:a)=ax\mp xx:av\mp vv=(a\mp x)x:(a\mp v)v$ das ist, PM^2:pm^2=PB.AP:pB.Ap, nämlich:

Die Quadrate der Semiordinaten verhalten sich, wie die Rectangula aus den Abscissen und der Zwerchaxe in die Abscissen.

Die 94. Aufgabe.

268. Die Verhältniß zu finden, welche das Quadrat der Zwerchaxe zu dem Quadrate der kleinen Axe hat.

Auflösung.

Das Quadrat der Zwerchaxe ist aa, der kleinen Axe aber ab (§. 262.). Also verhält sich jenes zu diesem, wie aa zu ab, das ist, wie a zu b (§. 144.), oder wie die Zwerchaxe zu dem Parameter.

Zusatz.

Tab. IV. Fig. 32.

269. Weil $b:a = PM^2 : AP.PB$, (§. 260.); so ist auch das Quadrat der kleinen Axe zu dem Quadrate der Zwerchaxe, wie das Quadrat der Semiordinate zu dem Rectangulo aus der Abscisse in die Summe aus der Abscisse und der Zwerchaxe.

Die 95. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 33. & 32.

270. Es seyn zwo Hyperbeln von gleicher Größe, die also einen Parameter, eine Zwerchaxe und eine kleine Axe haben, einander entgegen gesetzet, in der Weite ihrer Zwerchaxe AB. Ziehet aus beyder Brennpuncte f und F, gegen einen Punct einer Hyperbel M, zwo gerade Linien fM und FM. Ihr sollet ihre Größe finden.

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin, nur $FC = fC = c$; so ist $AF = c - \frac{1}{2}a$, $Af = c + \frac{1}{2}a$, $PF = x - c + \frac{1}{2}a$, $Pf = c + \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = xx - 2cx + cc + ax - ac + \frac{1}{4}aa$, $Pf^2 = cc + ac + \frac{1}{4}aa + 2cx + ax + xx$. Nun ist (§. 266.) $CD^2 = cc - \frac{1}{4}aa$, und (§. 268. 269.) $AC^2 : CD^2 = AP.PB : PM^2$, das ist, $\frac{1}{4}aa : cc - \frac{1}{4}aa = ax + xx : PM^2$, folglich $1 : \frac{4cc}{a^2} - 1 = ax + x^2 : PM^2$.

Dem=

Demnach ist:

$$PM^2 = -ax - xx + 4c^2x : a + 4ccxx : a^2$$
$$PF^2 = xx - 2cx + cc + ax - ac + \tfrac{1}{4}aa$$

$$FM^2 = cc - 2cx - ac + \tfrac{1}{4}aa + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a.$$

Wiederum:

$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$Pf^2 = cc + ac + \tfrac{1}{4}aa + 2cx + ax + xx$$

$$fM^2 = cc + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$fM = c + \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$
$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$fM - FM = a = AB.$$

Zusatz.

271. Hieraus fließt folgende Manier, die Hyperbel zu beschreiben. Auf eine gerade Linie ZX traget die Zwerchare AB und aus A in F, imgleichen aus B in f, die Weite des Brennpuncts von der Scheitel (§. 264.). Schlaget in F und f Nägel ein. Bindet an den Nagel F einen Faden FMC, und mit seinem andern Ende an das eine Ende eines Lineals fC, welches um die Zwerchare AB länger als der Faden ist. Hänget das Lineal mit dem andern Ende an den Nagel in f. Drücket den Faden mit einem Stifte an das Lineal und schiebet es fort; so wird er die Hyperbel beschreiben. Tab. IV. Fig. 33.

Anderst.

Traget auf eine gerade Linie die Zwerchare AB, und ferner aus B in f und aus A in F die Weite des Brennpuncts von der Scheitel (§. 264.). Ziehet aus f nach Gefallen die Linie f VII, und traget Tab. IV. Fig. 32.

aus

aus f in L die Länge der Zwerchaxe BA. Beschreibet aus f, mit beliebiger Eröfnung des Circuls die Bögen 1. 1, 2. 2, 3. 3, u. s. w. und durchschneidet sie aus F mit L I, L II, L III u. s. w. in 1. 2. 3. u. s. w. so sind die Puncte 1, 2, 3 ꝛc. in der Hyperbel.

Die 28. Erklärung.

Tab. IV. Fig. 34. 272. Wenn ihr die kleine Axe DE an die Scheitel der Hyperbel A rechtwinklicht setzet, und aus dem Mittelpuncte C durch ihre beyden Enden D und E die geraden Linien CR und Cr ziehet; so werden dieselben die Assymptoten genennet.

Der 1. Zusatz.

273. Weil CA:AE=CP:Pr, und CA:DA (=AE)=CP:PR (§. 185. *Geom.*); so ist PR =Pr (§. 71. *Arithm.*), folglich, da PM=Pm, so ist auch MR=mr (§. 31. *Arithm.*).

Der 2. Zusatz.

274. Wenn AI mit CR parallel gezogen wird; so ist EA:ED=AI:DC (§. 184. *Geom.*), folglich, da EA=$\frac{1}{2}$ED (§. 272.), so ist auch AI=$\frac{1}{2}$DC=$\frac{1}{2}$CE. Weil nun ferner EA:ED=EI:EC (§. 184. *Geom.*), und daher, weil EA=$\frac{1}{2}$ED, auch EI=$\frac{1}{2}$CE=CI; so ist auch AI=CI (§. 28. *Arithm.*).

Die 29. Erklärung.

275. Das Quadrat der Linie AI oder CI wird die Potenz der Hyperbel genennet.

Die 96. Aufgabe.

276. Die Größe der Potenz der Hyperbel zu finden.

Auflö-

Auflösung.

Es sey $CA=\frac{1}{2}a$, $AE=\frac{1}{2}c$; so ist $CE=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$ (§. 172. *Geom.*), und daher $CI=\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$: folglich $CI^2=(a^2+c^2):16$, nämlich, die Potenz der Hyperbel ist dem vierten Theile der Quadrate der beyden halben Axen gleich. Tab. IV. Fig. 34.

Die 97. Aufgabe.

277. Den Unterscheid zwischen den Quadraten PM und PR zu finden. Tab. IV. Fig. 34.

Auflösung.

Weil $CA:DA=CP:PR$ (§. 184. *Geom.*), und $DA=\sqrt{\frac{1}{4}ab}$ (§. 262.), $CP=\frac{1}{2}a+x$, so findet ihr $PR=(\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab}+x\sqrt{\frac{1}{4}ab}):\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1}{4}ab}+2x\sqrt{\frac{1}{4}ab}:a$. Derowegen ist:

$$\left.\begin{aligned} PR^2 &= \tfrac{1}{4}ab+bx+bxx:a \\ PM^2 &= \phantom{\tfrac{1}{4}ab+{}} bx+bxx:a \end{aligned}\right\} (\text{§}. 261.)$$

$$PR^2-PM^2=\tfrac{1}{4}ab=DA^2.$$

Zusatz.

278. Wenn ihr setzet, daß die Hyperbel mit ihrer Assymptote zusammen stoße, so fällt der Punct R auf M, und ist $PR^2=PM^2$, folglich $PR^2-PM^2=0$; allein $PR^2-PM^2=DA^2$. Darum ist $DA^2=0$. Da nun dieses ungereimt ist, so kann die Assymptote mit der Hyperbel niemals zusammen kommen.

Die 98. Aufgabe.

279. Die Größe des Rectanguli aus MR in Mr zu finden. Tab. IV. Fig. 34.

Auflö-

Auflösung.

Es sey PR=c, MP=y, so ist MR=$c-y$, mR=$y+c$, folglich MR.mr=c^2-y^2=PR^2—PM^2, nämlich:

Das Rectangulum aus MR in mR ist gleich der Differenz der Quadrate von PR und PM.

Zusatz.

280. Weil PR^2—PM^2=DA^2 (§. 277.), so ist mR.MR=DA^2.

Die 99. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 34. 281. Wenn QM und ſm mit der einen Asymptote Cr, hingegen qm und SM mit der andern CR parallel gezogen wird, die Verhältniß der Rectangulorum aus QM in MS und qm in ms zu finden.

Auflösung.

Es sey RM=rm=a, Rm=rM=b, MQ=v, mq=z. Nun ist (§. 184. *Geom.*).

RM	:	MQ	=	Rm	:	mſ
a	:	v	=	b	:	$(bv:a)$
rm	:	mq	=	rM	:	MS
a	:	z	=	b	:	$(bz:a)$

Derowegen ist MQ.MS=$bvz:a$, und mq.mſ=$bvz:a$, folglich MQ.MS=mq.mſ, das ist:

Die Rectangula aus MQ in MS und mq in mſ sind einander gleich.

Die 100. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 34. 282. Die Verhältniß des Rectanguli aus qm in mſ zu der Potenz der Hyperbel AI^2 zu finden.

Auflö-

Auflösung.

Es sey mr$=z$, qm$=y$, AE$=c$; so sind, wegen der Parallellinien AE und Pr, die Winkel CEA und qrm, und wegen der Parallelen AI und qm, die Winkel AIE und mqr einander gleich (§. 97. *Geom.*), folglich (§. 183. *Geom.*).

$$\text{mr} : \text{qm} = \text{AE} : \text{AI}$$
$$z : y = c : (cy:z).$$

Wiederum, weil mR.mr$=$AE^2 (§. 280.); so ist (§. 137.)

$$\text{mr} : \text{AE} = \text{AE} : \text{mR}$$
$$z : c = c : (c^2:z).$$

Endlich, wegen der Parallellinien ſm und CE, ist $o=x$, und wegen der Parallelen DE und Rm, $x=y$ (§. 97. *Geom.*), folglich $o=y$ (§. 28. *Arithm.*). Wegen der Parallelen AI und CR aber, ist IAE $=$CDE, und wegen der Parallelen DE und Rm, CDE$=$ſRm (§. 28. *Arithm.*). Daher (§. 183. *Geom.*).

$$\text{AE} : \text{IE} = \text{mR} : \text{ſm}$$
$$c : \frac{cy}{z} = \frac{cc}{z} : \frac{c^2y}{z^2}.$$

Solchergestalt ist ſm.qm$=c^2y^2:z^2$. Da nun auch AI$^2=c^2y^2:z^2$; so ist ſm.qm$=$AI^2, das ist:

Das Rectangulum aus ſm, oder Cq, in qm ist der Potenz der Hyperbel gleich.

Der 1. Zusatz.

283. Es sey CI$=$AI$=a$, Cq$=x$, qm$=y$; so ist $xy=a^2$ die Gleichung, welche die Natur der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten erkläret. Tab. IV. Fig. 34.

Der

Der 2. Zusatz.

Tab. IV. Fig. 35. 284. Wenn demnach die Asymptoten BA und AC nebst der Potenz der Hyperbel DE^2 gegeben werden: so könnet ihr die Hyperbel beschreiben. Ziehet nämlich durch E die Linie FG mit AC, und PN mit DE parallel. Ziehet ferner aus A in N eine gerade Linie AN, und HM mit AC parallel; so ist der Punct M in der Hyperbel. Denn AP:PN=AD:DH (§. 184. *Geom.*), das ist, weil PN=DE, und PM=DH, auch (§. 275.) ED=DA, AP:DE=AD:PM

$$x:a=a:y$$

folglich ———

$$a^2=xy.$$

Der 3. Zusatz.

285. Die Gleichung für unendliche Hyperbeln ist $a^{m+n}=x^m y^n$.

Anmerkung.

286. Eben so könnet ihr eine Gleichung für unendliche Hyperbeln in Ansehung der Axe finden $ay^{m+n}=ax^m(a+x)^n$, deren Beschreibung Intieri in aditu ad nova arcana Geometrica detegenda lehret pag. 36. & seq. Es ist aber zu merken, daß nach seiner Manier die Hyperbeln von einem höhern Geschlechte niemals beschrieben werden können, man habe denn zuvor alle niedrigere beschrieben. Eine andere leichtere Manier zeige ich in den Actis Eruditorum A. 1717.

Der 4. Zusatz.

Tab. IV. Fig. 34. 287. Wenn ihr wie vorhin AD=DE=a, AI =b, IP=x, PM=y setzet; so ist AP=$b+x$, folglich $a^2=by+xy$.

Die 30. Erklärung.

288. Eine gleichseitige Hyperbel wird genennet, in welcher die beyden Axen AB und DE einander gleich sind.

Der

Der 1. Zusatz.

289. Also ist auch der Parameter der Axe AB gleich (§. 262.).

Der 2. Zusatz.

290. Wenn man in der Gleichung für die Hyperbel $y^2 = bx + bx^2 : a$ demnach $a = b$ setzet, so kommt die Gleichung für die gleichseitige $y^2 = bx + x^2$.

Der 3. Zusatz.

291. Weil CA=AE; so ist der Winkel ACE 45°, folglich der Asymptotenwinkel RCr ein rechter Winkel. Tab. IV. Fig. 34.

Anmerkung.

292. Damit nun erhelle, daß die Parabel, Ellipsis und Hyperbel aus einem Kegel sich schneiden lassen, und also die Kegelschnitte der Alten sind; so will ich folgende drey Aufgaben noch hinzusetzen.

Die 101. Aufgabe.

293. Die Natur der krummen Linie zu finden, welche herauskommt, wenn man den Kegel ABC dergestalt schneidet, daß die Axe des Schnittes DE mit der Seite des Kegels CA parallel ist. Tab. IV. Fig. 36.

Auflösung.

Es sey HI mit AB, und PM mit EN parallel, AE=HP=v, PI=t, DP=x, DE=z; so ist (§. 184. *Geom.*).

$$DP : DE = PI : EB$$
$$x : z = t : (zt : x)$$

und PM²=HP.PI (§. 198.) =tv, EN²=AE. EB=$tzv : x$ (§. *cit.*), folglich:

$$PM^2 : EN^2 = tv : (tzv : x)$$

das ist $= tvx : tzv$

$\overline{}\ tv$

$= x : z$ (§. 144.)

$= DP : DE.$

Solchergestalt ist DLN eine Parabel (§. 231.).

Die 102. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 37. 294. Die Natur der krummen Linie zu finden, welche entstehet, wenn ein Kegel BCA dergestalt geschnitten wird, daß die Axe des Schnittes DE den Diameter der Grundfläche AB durchschneidet, wenn sie beyde verlängert werden.

Auflösung.

Es sey $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $QL = s$; so ist $PE = a - x$, $QE = a - v$, und weil IH mit LK parallel,

$$DP : PH = DQ : QK \quad (\text{§. 184. } Geom.)$$
$$x : t = v : (vt : x)$$
$$EQ : QL = EP : PI$$
$$a - v : s = a - x : \frac{as - sx}{a - v}.$$

Demnach ist $PM^2 = HP.PI = (tsa - tsx) : (a - v)$, und $QN^2 = KQ.QL = vts : x$ (§. 198.), folglich

$$PM^2 : QN^2 = \frac{tsa - tsx}{a - v} : \frac{vts}{x}$$

das ist $= tsax - tsx^2 : avts - v^2ts$

$\overline{}\ ts$

$= ax - x^2 : av - v^2$ (§. 144.).

Solchergestalt ist die Linie DLEND eine Ellipsis (§. 250.).

Die

Die 103. Aufgabe.

295. Die Natur der krummen Linie zu finden, welche entstehet, wenn ein Kegel ACB dergestalt geschnitten wird, daß die Axe des Schnittes DQ die Seite des Kegels AC schneidet, wenn beyde verlängert werden. Tab. IV. Fig. 38.

Anmerkung.

Es sey $ED=a$, $DP=x$, $DQ=v$, $PH=t$, $PI=s$; so ist $EP=a+x$, $EQ=a+v$, und (§. 184. *Geom.*).

$$EP : PH = EQ : AQ$$
$$a+x : t = a+v : \frac{at+tv}{a+x}$$
$$DP : PI = DQ : QB$$
$$x : s = v : (sv:x).$$

Demnach ist $PM^2=HP.PI=ts$, und $QN^2=AQ.QB$ $=(atsv+v^2st):(ax+x^2)$ (§. 198.), folglich:

$$PM^2 : QN^2 = ts : \frac{atsv+v^2ts}{ax+x^2}$$

das ist
$$= \frac{tsax+tsx^2 : tsav+tsv^2}{ts}$$
$$= ax+x^2 : av+v^2.$$

Solchergestalt ist die Linie DLNMD eine Hyperbel (§. 267.).

Die 31. Erklärung.

296. Es sey eine gerade Linie BD, welche mitten in E von einer andern AC rechtwinklicht durchschnitten wird. Ziehet aus C durch DB so viel gerade Linien, als ihr wollet, und machet überall QM=EA. Die Linie, welche durch alle Puncte M gehet, ist die Muschellinie (CON- Tab. V. Fig. 39.

CHOIS oder CONCHILIS) des Nicomedis. Dergleichen Linie entstehet auch unten, wenn man überall QN=EF macht.

Der 1. Zusatz.

297. Weil QM mit DB immer einen schieferen Winkel macht, je weiter sie von EA wegkommt; so muß die Conchois der geraden Linie DB immer näher kommen.

Der 2. Zusatz.

298. Doch, weil QM niemals zu einem Puncte werden kann, sondern vielmehr immer einerley Länge behält; so können auch die Puncte Q und M niemals zusammen stoßen, folglich kann die Conchois niemals mit der Linie DB zusammen kommen. Und also ist DB ihre Asymptote.

Die 104. Aufgabe.

299. Eine Gleichung zu finden, welche die Natur der Muschellinie erkläret.

Auflösung.

Es sey QM=AE=a, EC=b, MR=EP =x, ER=PM=y; so ist CP=$b+x$, und (§. 184. *Geom.*).

$$PE:MQ=EC:CQ$$
$$x:a=b:(ab:x).$$

Daher CM=$a+ab:x=(ax+ab):x$, folglich, weil $PM^2+PC^2=CM^2$ (§. 172. *Geom.*), $y^2+x^2+2bx+b^2=(a^2b^2+2a^2bx+a^2x^2):x^2$ das ist, $x^4+2bx^3+y^2x^2+b^2x^2=a^2b^2+2a^2bx+a^2x^2$, welche Gleichung die Natur der oberen Muschellinie MAM erkläret.

Es sey CE=b, QN=a, EG=ON=x, GN =EO=y, so ist GC=$b-x$, und (§. 184. *Geom.*).

$$EG : QN = GC : CN$$
$$x : a = b-x : (ab-ax) : x.$$

Daher, weil $CN^2 = CG^2 + GN^2$ (§. 172. *Geom.*), $(a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2) : x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, das ist, $a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 = b^2x^2 - 2bx^3 = x^4 + x^2y^2$, welche Gleichung die Natur der untern Muschellinie NFN erkläret.

Die 32. Erklärung.

300. Wenn man die Semiordinaten des Circuls PM verlängert, und auf die Sehne AM den Perpendicul AN aufrichtet, welche sie in N durchschneidet; so kommt die krumme Linie heraus, welche *Diocles* vor diesem *CISSOIDEM* genennet hat. Tab. IV. Fig. 40.

Der 1. Zusatz.

301. Weil PB:PM=PM:PA und PM:PA =PA:PN (§. 210. *Geom.*); so sind die vier Linien BP, PM, AP und PN in einer stäten Proportion. Tab. IV. Fig. 40.

Der 2. Zusatz.

302. Es sey AB=a, PN=y, AP=x, so ist PB=$a-x$. Da nun (§. 301. 142.).

$$BP^2 : PM^2 = AP^2 : PN^2$$

so ist $a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$

das ist $a - x : x = x^2 : y^2$

folglich $x^3 = ay^2 - xy^2$

oder $y^2 = x^3 : (a-x)$.

Der 3. Zusatz.

303. Wenn $x=a$, und also BD=y, so ist $a^3 = 0y^2$, folglich $0 : 1 = a^3 : y^2$, und demnach BD,

in Ansehung AB, unendlich groß, das ist, die Asymptote von der CISSOIDE.

Die 33. Erklärung.

Tab. V. Fig. 41. 304. Theilet einen Quadranten eines Circuls ABC in so viele gleiche Theile, als euch beliebt. In eben so viele Theile theilet den halben Diameter AB in I. II. III. u. s. w. Richtet aus diesen Puncten Perpendicularlinien auf, und ziehet aus dem Mittelpuncte A in die Theilungspuncte des Bogens die Linien A 1, A 2, A 3 u. s. w. welche die Perpendicularlinien in a. b. c. d. e. durchschneiden. Die krumme Linie, welche durch die Puncte a. b. c. &c. gehet, wird die *QUADRATRIX* des *Dinostratis* genennet.

Zusatz.

305. Derowegen ist allezeit, wie der ganze Bogen BC zu dem Bogen C4, so AB zu A IV. Es sey BC=b, AB=a, C 4=x, A IV=y, so ist $ax=by$.

Die 34. Erklärung.

Tab. V. Fig. 42. 306. Theilet eine Linie Ap in lauter gleiche Theile, und richtet aus den Theilungspuncten A, P, p ꝛc. Perpendicularlinien auf AN, PM, pm ꝛc. welche in einer geometrischen Proportion abnehmen. Die krumme Linie, welche durch die Puncte N, M, m ꝛc. gehet, wird die logarithmische genennet.

Zusatz.

307. Es sind demnach die Abscissen AP die Logarithmi der Semiordinaten PM (§. 21. *Trig.*).

Anmer-

Anmerkung.

308. *Hugenius* hat zu Ende seines Discurses sur la pésanteur verschiedene Eigenschaften dieser Linie beschrieben, welche *Guido Grandus* in einem besondern Buche demonstriret, welches er unter dem Titul, Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum circa logisticam, seu logarithmicam Lineam, zu Florenz 1701 in 4 herausgegeben hat. Es können noch andere Arten der logarithmischen Linien erdacht werden. So hat man eine logarithmische Spirallinie erfunden, in welcher der Quadrant AB in gleiche Theile getheilet wird, und aus dem Mittelpuncte C gegen die Theilungspuncte des Bogens die Radii C I. C II. C III. &c. gezogen, von ihnen aber in geometrischer Proportion die Linien C 1. C 2. C 3. &c. abgeschnitten werden, durch deren Ende 1. 2. 3. ꝛc. die verlangte Linie gehet. Tab. V. Fig. 43.

Die 35. Erklärung.

309. Wenn sich ein Circul auf einer Linie AC fort bewegt, bis er sich ganz überworfen hat, so beschreibt der Punct a die Linie ABC, welche *CYCLOIS* oder die Radlinie genennet wird. Tab. V. Fig. 44.

Zusatz.

310. Es ist also die Linie AC der Peripherie des Circuls, und überhaupt eine jede Semiordinate PM dem Bogen Ma gleich. Denn die gerade Linie Ad ist dem Bogen Pd, und daher der übrige Bogen Pb, folglich auch der Bogen BM, der Linie dD gleich. Nun ist OD=ML (§. 22. *Geom.*) =PN (§. 122. *Geom.* §. 2. *Trig.*). Derowegen, da NM=dO, so ist auch PN+MN =Od+OD, das ist, PM=dD. Folglich ist die Semiordinate PM dem Bogen Pb, oder ihrer Absciße BM gleich.

Die 36. Erklärung.

Tab. IV. Fig. 39. 311. Wenn die Peripherie des Circuls APA in gleiche Theile getheilet wird, und man den Radium CA in eben so viele Theile theilet, nach diesem CM einem, Cm zweyen 2c. solchen Theilen gleich macht; so sind die Puncte M, m &c. in der Spirallinie des *Archimedis*. Diese Linie kann nach Gefallen unendlich verlängert werden, durch Hülfe neuer Circul, welche mit dem zweyfachen, dem dreyfachen 2c. Radio beschrieben werden.

Zusatz.

312. Es sey die Peripherie $=p$, $AC=r$, $AP=x$, $PM=y$; so ist $CM=r-y$, folglich $pr-py=rx$. Wenn aber $CM=y$; so ist $py=rx$, und demnach für unendliche Spirallinien $r^n x^m = p^n y^m$.

Anmerkung.

313. Bisher habe ich die leichtesten Regeln der Algebra von den niedrigsten Gleichungen erkläret, und bey allerhand Aufgaben angebracht. Nun will ich die übrigen vornehmen, welche man in Auflösung der höheren Gleichungen vonnöthen hat.

Von der Natur der Gleichungen.

Die 37. Erklärung.

314. Die Wurzel ist der Werth der unbekannten Größe in einer Gleichung. Und ist es eine wahre Wurzel, wenn sie das Zeichen + hat. Z. E. Wenn $x=+3$; hingegen eine falsche Wurzel, wenn sie das Zeichen − hat. Z. E. wenn $x=-3$.

Die

Die 105. Aufgabe.

315. Die Natur der Gleichungen und ihre vornehmsten Eigenschaften zu untersuchen.

Auflösung.

1. Nehmet so viele Werthe von x an, als euch beliebt, formiret daraus einfache Gleichungen, und bringet sie auf o.
2. Multipliciret die einfachen Gleichungen in einander, so werden die höheren heraus kommen, deren Betrachtung euch ihre Eigenschaften offenbaren wird.

Es sey	$x=2$	$x=a$
	$x=-3$	$x=-b$
	$x=4$	$x=c$
so ist	$x-2=0$	$x-a=0$
	$x+3=0$	$x+b=0$
	$x-4=0$	$x-c=0$

$$\begin{array}{l} x-2=0 \\ x+3=0 \\ \hline \quad +3x-6 \\ x^2-2x \\ \hline x^2+x-6=0 \\ \quad x-4=0 \\ \hline \quad -4x^2-4x+24 \\ x^3+x^2-6x \\ \hline x^3-3x^2-10x+24. \end{array} \qquad \begin{array}{l} x-a=0 \\ x+b=0 \\ \hline \quad +bx-ab=0 \\ x^2-ax \\ \hline \quad x^2+bx-ax-ab=0 \\ x-c=0 \\ \hline \quad cx^2-bcx+acx+abc \\ x^3+bx^2-ax^2-abx \\ \hline x^3+cx^2+bx^2-bcx-ax^2 \\ \quad +acx-abx+abc. \end{array}$$

Wenn ihr diese Gleichungen (welche ihr nach Belieben auf höhere Grade erhöhen könnet) betrachtet; so werdet ihr mit dem *Harriot* und *Cartesio* wahrnehmen:

1. Die bekannte Größe des andern Gliedes sey die Summe aller Wurzeln mit einem widrigen Zeichen; des dritten Gliedes die Summe der Producte aus zwoen in zwo Wurzeln; des vierten die Summe der Producte aus dreyen in drey Wurzeln ꝛc.: endlich das letzte Glied das Product aus allen Wurzeln mit einander. Z. E. in der quadratischen Gleichung ist die bekannte Größe des andern Gliedes +1, die Wurzeln sind +2 und —3.

2. Eine jede Gleichung habe so viele Wurzeln, als das erste Glied Abmessungen hat, oder der Exponent der Dignität desselben Gliedes Einheiten in sich begreift. Z. E. in der quadratischen Gleichung ist der Exponent 2, die Zahl der Wurzeln ist auch 2.

3. Und zwar seyn in jeder Gleichung so viele wahre Wurzeln, als Abwechslungen der Zeichen sind; so viele falsche, als einerley Zeichen auf einander folgen. Z. E. in unserer quadratischen Gleichung, welche eine wahre Wurzel +2 und eine falsche —3 hat, folgen auf einander ++, und wechseln ab +—. In der cubischen, welche zwo wahre Wurzeln +2 und +4 und eine falsche —3 hat, wechseln anfangs +—, darauf folgen auf einander — —, und abermals wechseln ab —+.

Die 1. Anmerkung.

316. Der erste und andere Satz läßt sich gar leicht aus der Art, wie die Gleichungen entstehen, demonstriren, so, daß ich es für unnöthig achte, den Beweis hieher zu setzen. Allein den dritten, welchen *Harriot* zuerst durch vielen Versuch gefunden, hat zur Zeit noch keiner überhaupt erweisen können, daher ihn auch *Reynault* aus seiner Analyse demonstré gar weggelassen hat, weil er die Regeln der Algebra hat demonstriren wollen.

Die 2. Anmerkung.

317. Ihr dürfet euch nicht wundern, daß eine einige Gleichung so gar verschiedene Wurzeln haben kann. Denn es ist zu wissen, daß eine einige Aufgabe öfters verschiedene Fälle haben kann, und wir in jedem Falle auf einerley Gleichung verfallen; wie wir Exempel von der quadratischen Gleichung gehabt haben, in welcher einerley Gleichung herauskommt, ob man die eine oder die andere von den gesuchten Größen x nennet. Doch, weil unterweilen einige Fälle unmöglich werden, so muß auch die Gleichung unmögliche Wurzeln haben. Wie viele aber in jedem Falle unmögliche Wurzeln sind, hat zwar *Newton* in seiner Arithmetica universali p. 212. zu zeigen einiger maßen sich bemühet; doch, weil weder die Regel allgemein ist, noch auch er die Demonstration hinzusetzt, so wollen wir uns damit nicht aufhalten, zumal, da man sie auch in den Leipziger Actis A. 1708. p. 522, 523. findet.

Die 106. Aufgabe.

318. **Die Wurzel einer gegebenen Gleichung um eine gegebene Größe zu vermehren oder zu vermindern, unerachtet man sie noch nicht erkannt hat.**

Auflösung.

Es sey die gegebene Aequation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. Ihr sollet die Wurzel um 3 vermehren. Setzet

$$x + 3 = y$$

so ist

$$x = y - 3$$
$$x^2 = y^2 - 6y + 9$$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 9y^2 + 27y - 27 \\ -6x^2 &= \quad\; - 6y^2 + 36y - 54 \\ +13x &= \qquad\qquad\; + 13y - 39 \\ -10 &= \qquad\qquad\qquad\; - 10 \end{aligned}$$

$$y^3 - 15y^2 + 76y - 130 = 0.$$

Eine neue Gleichung, worinnen $y = x - 3$.

Wenn

Wenn ihr in der Gleichung die Wurzel um 3 vermindern sollet, so setzet:

$$y - 3 = x$$

so ist

$$y = x + 3$$

$$y^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\begin{array}{rl} y^3 = & x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \\ -15y^2 = & -15x^2 - 90x - 135 \\ +76y = & +76x + 228 \\ -130 = & -130 \\ \hline & x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0. \end{array}$$

Eine neue Gleichung, worinnen $x = y - 3$.

Die 107. Aufgabe.

319. Die Wurzel in einer Gleichung durch eine gegebene Größe zu multipliciren.

Auflösung.

Ihr sollet in der Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ die Wurzel durch a multipliciren. Setzet:

$$ax = y$$

so ist

$$x = y : a$$

$$x^2 = y^2 : a^2$$

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 : a^3 \\ -px^2 = & -py^2 : a^2 \\ +qx = & +qy : a \\ -r = & -r \\ \hline & y^3 : a^3 - py^2 : a^2 + qy : a - r = 0 \\ a^3 & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \end{array}$$

$y^3 - apy^2 + a^2qy - a^3r = 0$, eine neue Gleichung, in welcher $y = ax$.

Zusatz.

Zusatz.

320. Hieraus erhellet, daß ihr nur die vorgegebene Gleichung durch eine geometrische Progression multipliciren dürfet, deren erstes Glied 1, der Exponent aber diejenige Zahl ist, durch welche die Wurzel multiplicirt werden soll. Z. E. Es soll in der Gleichung $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ die Wurzel durch 2 multiplicirt werden: so verfahret also:

$$\begin{array}{ccccc} x^4 + & 4x^3 - & 19x^2 - & 106x - & 120 = 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline y^4 + & 8y^3 - & 76y^2 - & 848y - & 1920 = 0 \end{array}$$

eine Gleichung, worinnen $y = 2x$.

Wiederum, es soll in der Gleichung $x^4 + qx^2 - rx - s = 0$ die Wurzel durch c multiplicirt werden. Verfahret also:

$$\begin{array}{ccccc} x^4 & * & +qx^2 - & rx - & s = 0 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ \hline y^4 & * & +c^2qy^2 - & c^3ry - & c^4s = 0 \end{array}$$

eine neue Gleichung, worinnen $y = cx$.

Anmerkung.

321. Der Stern wird jederzeit in die Stelle der Glieder gesetzt, welche fehlen.

Die 108. Aufgabe.

322. **Die Wurzel in einer gegebenen Gleichung durch eine gegebene Größe zu dividiren.**

Auflösung.

Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Die Wurzel soll durch a dividirt werden.

Setzet:

Setzet $x:a=y$

so ist

$$x=ay$$
$$x^2=a^2y^2$$
$$x^3=a^3y^3$$
$$-px^2=\quad -a^2py^2$$
$$+qx=\quad +aqy$$
$$-r=\quad -r$$
$$a^3y^3-a^2py^2+aqy-r=0$$
$$a^3$$
$$y^3-py^2:a+qy:a^2-r:a^3=0.$$

Eine neue Gleichung, in welcher $y=x:a$.

Zusatz.

323. Hieraus erhellet, daß ihr die vorgegebene Gleichung nur durch eine geometrische Progression dividiren dürfet, deren erstes Glied 1, der Exponent aber diejenige Größe ist, wodurch die Division geschehen soll. Z. E. Die Wurzel von $x^4+8x^3-76x^2-848x-1920=0$ soll durch 2 dividirt werden. Verfahret also:

$$x^4+8x^3-76x^2-848x-1920=0$$
$$1\quad -2\quad 4\quad 8\quad 16$$
$$y^4+4y^3-19y^2-106y-120=0.$$

Eine neue Gleichung, worinnen $y=\frac{1}{2}x$.

Wiederum, es soll die Wurzel von $x^3-36x-54=0$ durch 3 dividirt werden. Verfahret also:

$$x^3 * -36x-54=0$$
$$1\quad 3\quad 9\quad 27$$

$y^3-4y-2=0$, eine neue Gleichung, worinnen $y=\frac{1}{3}x$.

Die

Die 109. Aufgabe.

324. **Eine Gleichung, in welcher einige Glieder fehlen, vollständig zu machen.**

Auflösung.

Vermehret die Wurzel um so viel, als ihr wollet, oder vermindert sie (§. 318.): so ist geschehen, was man verlangte.

Z. E. Es sey $x^3 * -23x-70=0$.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Setzet:} & x+1=y \\
\text{so ist} & x=y-1 \\
& x^2=y^2-2y+1 \\
\hline
& x^3=y^3-3y^2+3y-1 \\
-23x = & \qquad -23y+23 \\
-70 = & \qquad\qquad -70 \\
\hline
& y^3-3y^2-20y-48=0.
\end{array}
$$

Eine neue Gleichung, worinnen kein Glied fehlet, und $y=x+1$.

Die 110. Aufgabe.

325. **Aus einer gegebenen Gleichung das andere Glied wegzuschaffen.**

Auflösung.

Wenn das andere Glied das Zeichen + hat, so vermehret; hat es aber das Zeichen —, so vermindert die Wurzel (§. 318.) durch den Quotienten, welcher herauskommt, wenn man die bekannte Größe des andern Gliedes durch den Exponenten des ersten dividirt.

Z. E. Ihr sollet aus der Gleichung $x^3-8x^2-x+8=0$ das andere Glied wegnehmen.

Setzet

Setzet $x - 8:3 = y$
so ist $x = y + 8:3$
$x^2 = y^2 + 16y:3 + 64:9$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 8y^2 + 192y:3 + 512:27 \\ -8x^2 &= -8y^2 - 128y:3 - 512:9 \\ -x &= -y - 8:3 \\ +8 &= +8 \\ \hline y^3 &\ * \ -67y:3 - 880:27 = 0. \end{aligned}$$

Eine neue Gleichung, worinnen das andere Glied fehlet, und $y = x - 8:3$.

Zusatz.

326. Wenn ihr also aus einer quadratischen Gleichung das andere Glied wegnehmet; so könnet ihr solche noch auf eine andere Art, als vorhin (§. 83.) geschehen ist, auflösen. Z. E.

Es sey $x^2 - 8x + 15 = 0$. Setzet $x - 4 = y$;
so ist $x = y + 4$

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 + 8y + 16 \\ -8x &= -8y - 32 \\ +15 &= +15 \\ \hline y^2 - 1 &= 0 \\ \hline y &= 1 \end{aligned}$$

folglich $x = 1 + 4 = 5$.

Die 111. Aufgabe.

327. Aus einer gegebenen Gleichung die Brüche wegzuschaffen.

Auflösung.

Multipliciret die Wurzel durch das Product aus den Nennern aller vorkommenden Brüche,

oder

oder eine Zahl, durch welche sich die Nenner dividiren lassen. So ist geschehen, was man verlangte.

Exempel.

$$y^3 * - 67y:3 - 880:27 = 0$$
$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$

$$x^3 * - 201x - 880 = 0.$$

Eine neue Gleichung, in welcher $x = 3y$.

$$x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{3}{4}x - 64 = 0$$
$$1 \quad 12 \quad 144 \quad 1728$$

$$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0.$$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = 12x$.

Die 112. Aufgabe.

328. Aus einer gegebenen Gleichung die Jrrationalgrößen zu schaffen.

Auflösung.

Unterweilen kann solches durch die Multiplication; zuweilen durch die Division geschehen. Keine Regel ist allgemein.

$$x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0$$
$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{8} \quad 4$$

$$y^4 + 4ay^3 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0.$$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = x\sqrt{2}$.

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$
$$1 \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{16} \quad 4$$

$$y^3 - 2ay^2 + 8aby - 4aab = 0.$$

Eine neue Gleichung, welche ganz rational ist, und deren Wurzel $y = x\sqrt[3]{4}$.

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$

$$1 \quad \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{4} \quad 2$$

$$y^3 - ay^2 + 2aby - \tfrac{1}{2}aab = 0.$$

Eine neue Gleichung, welche ganz rational ist, und deren Wurzel $y = x : \sqrt[3]{2}$.

Anmerkung.

329. Alles, was bisher von den Gleichungen gelehret worden, ist zu dem Ende geschehen, damit wir sie völlig auflösen, das ist, den Werth der unbekannten Größe sowohl geometrisch, als in Zahlen finden könnten, welches nun im Folgenden gezeigt werden soll.

Die 113. Aufgabe.

330. Alle Rationalwurzeln, welche in einer gegebenen Gleichung enthalten sind, zu finden.

Auflösung.

1. Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Weil 24 das Product aus allen Wurzeln ist (§. 315.); so zerfället es in die Zahlen, durch deren Multiplication es entstehet, welche sind 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. und machet daraus folgende einfache Gleichungen: $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 4 = 0$ 2c.
2. Dividiret die gegebene Gleichung durch diese einfachen, denn durch welche sie sich dividiren läßt, die zeigen ihre Rationalwurzeln (§. 315.). Als $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ läßt sich dividiren durch $x + 3$, derowegen ist -3 eine falsche Wurzel von dieser Gleichung. Der Quotient, welcher herauskommt $x^2 - 6x + 8 = 0$, läßt sich ferner dividiren durch $x - 2$, und der neue Quotient

tient ist $x-4$. Derowegen sind 2 und 4 zwo wahre Wurzeln von der gegebenen Gleichung.

Anderst.

Ihr dürfet auch nur die Zahlen, in welche das letzte Glied zerfället worden ist, nach einander in die Stelle vor x setzen: denn, wenn dadurch die ganze Gleichung zernichtet wird, so ist die vor x gesetzte Zahl eine von ihren Rationalwurzeln (§. 315.). Z. E. Es sey $x^2-6x+8=0$. Das letzte Glied 8 entstehet, wenn ihr 2 durch 4 multipliciret.

Setzet, $4=x$

so ist
$$
\begin{aligned}
16&=x^2\\
-24&=-6x\\
+8&=+8\\
\hline
0&=0.
\end{aligned}
$$

Solchergestalt ist $+4$ eine von den Rationalwurzeln.

Die 1. Anmerkung.

331. Weil in der ersten Manier das viele Dividiren beschwerlich fallen würde, so hat man diesen Vortheil ausgedacht. 1) Ziehet die Zahl, welche ihr versuchen wollet, von der bekannten Zahl des andern Gliedes ab, und was herauskommt, multipliciret durch eben selbige Zahl. 2) Das Product ziehet von der bekannten Zahl in dem dritten Gliede ab, und was überbleibt, multipliciret abermal durch mehr gedachte Zahl. 3) Das neue Product ziehet von dem vierten Gliede ab, u. s. w. Wenn endlich bey dem letzten Gliede nichts übrig bleibt, so ist die versuchte Zahl eine von den Rationalwurzeln. Z. E. Ihr suchet die Rationalwurzeln von $x^3-3x^2-13x+15=0$. Das letzte Glied 15 läßt sich in 1. 3. 5. 15 zerfallen. Wenn ihr versuchen wollet, ob einige darunter von den Wurzeln seyn, so geschiehet es folgendergestalt:

$$\begin{array}{rrrrl}
x^3 & -\;3x^2 & -13x & +15 & =0 \\
 & -\;1 & +\;2 & +15 & \\ \cline{2-4}
 & -\;2 & -15 & 0 & \\
-1 & & & & \\ \cline{2-3}
 & +\;2 & +15 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl}
x^3 -\;3x^2 & -13x & +15 & =0 \\
+\;3 & +18 & +15 & \\ \hline
-\;6 & +\;5 & 0 & \\
+\;3 & +\;3 & & \\ \cline{1-2}
-18 & -15 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl}
x^3 -\;3x^2 & -13x & +15 & =0 \\
-\;5 & -10 & +15 & \\ \hline
+\;2 & -\;3 & 0 & \\
-\;5 & -\;5 & & \\ \cline{1-2}
-10 & +15 & &
\end{array}$$

Also ist $x-1=0$, $x+3=0$, $x-5=0$, das ist, 1 und 5 sind die beyden wahren Wurzeln, 3 ist die falsche.

Die 2. Anmerkung.

332. Damit ihr aber sehet, daß dieser Vortheil aus der ersten Manier völlig genommen, und für keine besondere zu halten sey, so will ich das vorige Exempel nach der gemeinen Art rechnen.

$$\begin{array}{r|l|l}
x-1 & x^3-3x^2-13x+15=0 & x^2-2x-15 \\
 & x^3-\;x^2 & \\ \hline
 & \quad -2x^2-13x & \\
 & \quad -2x^2+\;2x & \\ \hline
 & \qquad\quad -15x+15 & \\
 & \qquad\quad -15x+15 & \\ \hline
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Die

Die 114. Aufgabe.

333. Die Schranken zu finden, zwischen welchen die Größe der Wurzeln enthalten ist.

Auflösung.

Es sey $x^3 - qx + r = 0$; so ist $x^3 + r = qx$, und demnach qx größer als r, folglich x größer, als $r:q$. Wiederum, qx ist größer als x^3, und daher q größer als x^2, folglich x kleiner, als $\sqrt{q}$. Die Schranken der Wurzeln in dem gegenwärtigen Falle sind also $r:q$ und $\sqrt{q}$.

Es sey $x^3 + qx - r = 0$, so ist $x^3 + qx = r$, und demnach qx kleiner als r, folglich x kleiner als $r:q$. Wiederum, r ist größer als x^3, und daher x kleiner als $r^{1:3}$, folglich $xr^{2:3}$ größer als x^3, und $xr^{2:3} + qx$ größer als r, endlich x größer als $r:(r^{2:3} + q)$. Also fällt die Größe der Wurzel zwischen $r:q$ und $r:(r^{2:3} + q)$. Es sey $x^3 - px^2 + qx - r = 0$; so ist $x^3 - px^2 = r - qx$. Wenn nun x größer als p, so ist auch r größer als qx, und dannenhero x kleiner als $r:q$. Hingegen, wenn p größer als x ist, so ist qx größer als r, und dannenhero auch x größer als $r:q$. Derowegen fallen in beyden Fällen die Wurzeln zwischen p und $r:q$.

Es sey $x^3 - px^2 - qx + r = 0$; so ist $x^3 + r = px^2 + qx$, folglich $px^2 + qx$ größer als r, und daher auch $x^2 + qx:p + qq:4pp$ größer als $r:p + qq:4pp$, $x + q:2p$ größer als $\sqrt{(r:p + qq:4pp)}$, endlich x größer als $\sqrt{(r:p + qq:4pp)} - q:2p$. Wiederum $px^2 + qx$ ist größer als x^3 dannenhero $px + q$ größer als x^2, und q größer als $x^2 - px$, das ist, $x^2 - px + \frac{1}{4}pp$ kleiner als $q + \frac{1}{4}pp$, $x - \frac{1}{2}p$ kleiner als $\sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$ endlich x kleiner als $\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$. Die Schranken also der Wurzeln sind $\sqrt{(r:p + qq:4pp)} - q:2p$ und $\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$.

Es sey $x^4 - qx^2 - rx - s = 0$; so ist $x^4 - qx^2 = rx + s$. Demnach ist x^2 größer als q, weil sich qx^2 von x^4 abziehen läßt, und x größer als $\sqrt{q}$. Daher $x\sqrt{q}$ größer als q, und $x^3\sqrt{q}$ größer als qx^2. Wiederum, weil $x^4 - rx = qx^2 + s$, so ist x^3 größer als r, und x größer $r^{1:3}$, daher x^2 größer als $xr^{1:3}$, x^3 größer als $xr^{2:3}$, und $x^3 r^{1:3}$ größer als rx. Endlich, da $x^4 - s = qx^2 + rx$, so ist x^4 größer als s, und x größer als $s^{1:4}$, folglich x^3 größer als $s^{3:4}$, und $x^3 s^{1:4}$ größer als s. Weil nun $x^4 = qx^2 + rx + s$, so ist x^4 kleiner als $x^3\sqrt{q} + x^3 r^{1:3} + x^3 s^{1:4}$, und deswegen x kleiner als $q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$. Die Schranken der Wurzel in dem gegenwärtigen Falle sind also $\sqrt{q}$ oder $r^{1:3}$ und $q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$.

Eben so wird in andern Fällen verfahren.

Anmerkung.

334. Damit ihr die vorgeschriebene Manier besser fassen möget, so will ich ein Exempel in Zahlen anführen. Z. E. Es sey $x^3 - 3x + 1 = 0$, so ist $q = 3$, und $r = 1$, folglich $r : q = 1 : 3$, und $\sqrt{q} = \sqrt{3}$. Solchergestalt sind die Schranken dieser Gleichung $\frac{1}{3}$ und $\sqrt{3}$, das ist, die Wurzel muß größer als $\frac{1}{3}$ und kleiner als $\sqrt{3}$ seyn.

Zusatz.

335. Wenn ihr die Zahl wisset, welche größer als eure Wurzel ist, so werdet ihr nicht mit vergeblichen Zahlen (§. 330. 331.) versuchen, ob sie unter die Rationalwurzeln gehören, oder nicht.

Die 115. Aufgabe.

336. **Aus einer cubischen Gleichung die Wurzeln zu finden.**

Auflösung.

Wenn aus den cubischen Gleichungen das andere Glied weggenommen wird, so bekommet ihr drey Fälle, nämlich

x^2

$$x^3 = +px + q$$
$$x^3 = -px + q$$
$$x^3 = +px - q$$

Damit ihr nun die Wurzel findet, so setzet

$$x = y + z.$$

Dann ist $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3$

$px = py + pz$

$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = py + pz + q$ im ersten Falle.

Setzet $3y^2z + 3z^2y = py + pz$

$\overline{}\ y + z$

so ist $3yz = p$

$z = p : 3y.$

Ferner ist $y^3 + z^3 = q$

das ist $y^3 + p^3 : 27y^3 = q$

$y^6 + p^3 : 27 = qy^3$

$y^6 - qy^3 = -p^3 : 27$

$\quad \frac{1}{4}qq \qquad \frac{1}{4}qq$ (§. 83.).

$y^6 - qy^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$

$y^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)}$

$y = (\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)})^{1:3}$

Nun ist $z^3 = q - y^3$

das ist $z^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)}$

$z = (\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)^{1:3}}$

Demnach ist $z + y = (\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)})^{1:3} + (\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)})^{1:3}$ die verlangte Wurzel in dem ersten Falle.

Eben so findet ihr für x in dem andern Falle $(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3)})^{1:3} + (\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3)})^{1:3}$

Und in dem dritten Falle $(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)})^{1:3} + (-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)})^{1:3}$.

Die 1. Anmerkung.

337. Diese Regeln werden insgemein *Cardani* Regeln genennet, weil er sie aus *Scipionis Ferrei* Erfindung zuerst in Druck gegeben hat.

Die 2. Anmerkung.

338. Damit aber ihr Gebrauch erhelle, so will ich ein und das andere Exempel anführen. Es sey $x^3 = {}^* 6x + 40$. Weil $p=6$, $q=40$, und daher $\frac{1}{2}q=20$, $\frac{1}{4}qq=400$, $\frac{1}{3}p=2$, $\frac{1}{27}p^3=8$; so ist vermöge der ersten Regel, $x=(20-\sqrt{(400-8)})^{1:3}+(20+\sqrt{(400-8)})^{1:3}=(20-\sqrt{392})^{1:3}+(20+\sqrt{392})^{1:3}=$ (wenn die Cubicwurzel beyderseits wirklich ausgezogen wird) $2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}=4$. Ist demnach 4 eine wahre Wurzel.

Es sey $x^3 = {}^* -3x + 36$. Weil $p=-3$, $q=36$, und daher $\frac{1}{2}q=18$, $\frac{1}{4}qq=324$, $\frac{1}{3}p=-1$, $\frac{1}{27}p^3=-1$; so ist, vermöge der andern Regel, die Wurzel $(18-\sqrt{(324+1)})^{1:3}+(18+\sqrt{(324+1)})^{1:3}=$ (wenn ihr die Cubicwurzel beyderseits wirklich ausziehet) $1\frac{1}{2}-\sqrt{3\frac{1}{4}}+1\frac{1}{2}+\sqrt{3\frac{1}{4}}=3$.

Es sey $x^3 = {}^* 6x - 40$. Weil $p=6$, $q=-40$, und daher $\frac{1}{2}q=-20$, $\frac{1}{4}qq=400$, $\frac{1}{3}p=2$, $\frac{1}{27}p^3=8$; so ist, vermöge der dritten Regel, $(-20+\sqrt{(400-8)})^{1:3}+(-20-\sqrt{(400-8)})^{1:3}=-20+\sqrt{392})^{1:3}+(-20-\sqrt{392})^{1:3}=$ (wenn die Cubicwurzel beyderseits wirklich ausgezogen wird) $-2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-2=-4$. Demnach ist 4 eine falsche Wurzel der vorgegebenen Gleichung.

Die 3. Anmerkung.

339. Man hat zwar auf eine gleiche Art eine Regel für die Wurzeln aus einer Gleichung von dem vierten Grade auszuziehen gefunden: allein weil sie nicht sonderlich gebraucht wird, so will ich die Anfänger damit nicht aufhalten, sondern gehe vielmehr fort und zeige, wie man durch Näherung die Wurzel finden kann, wenn eine Gleichung keine Rationalwurzel hat.

Die 116. Aufgabe.

340. **Aus einer jeden gegebenen Gleichung die Wurzel durch Näherung zu finden.**

Auflö-

Auflösung.

Wir wollen die Regeln bald bey Exempeln anbringen, und zwar den Anfang von einer quadratischen Gleichung machen, damit wir sie desto besser begreifen.

Es sey demnach $x^2 - 5x - 31 = 0$. Setzet vermöge der Grenzen, welche die Gleichung haben kann (§. 333.), die Wurzel sey $8 + y$, dergestalt, daß y einen Bruch bedeutet, um welchen 8 entweder grösser oder kleiner ist als x. Solchergestalt ist

$$\begin{array}{rl} x^2 = & +64 + 16y + y^2 \\ -5x = & -40 - 5y \\ -31 = & -31 \\ \hline & -7 + 11y + y^2 = 0. \end{array}$$

Da nun die Dignitäten eines Bruches beständig abnehmen, und man hier nur die Wurzel beynahe wissen will, so läßt man y^2 weg, und nimmt an,

$$-7 + 11y = 0$$

das ist $11y = 7$

$$y = \frac{7}{11} = \frac{6}{10} \text{ beynahe } = 0.6$$

Also ist $x = 8 + 0.6 = 8.6$.

Weil der Werth von x in zehen Theilchen noch nicht genau genug bestimmet ist; so setzet $x = 8.6 + y$, und verfahret wie vorhin. Ihr findet demnach

$$\begin{array}{rl} x^2 = & + \frac{7396}{100} + \frac{172}{10}y + y^2 \\ -5x = & - \frac{430}{10} - 5y \\ -31 = & - 31 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{7396}{100} - \frac{430}{10} - 31 + \frac{172}{10}y - 5y = 0.$$

Das ist, wenn man die Brüche unter einerley Benennung bringet (welches hier, den Anfängern zu Gefallen, einmal für allemal geschehen soll)

$$7396-4300-3100+(1720-500)y=0$$

$$-0004+1220y=0$$

$$1220y=0004$$

$$y=0004:1220$$

das ist $y=0.0032$: wenn ihr 0.004 zu 1000 Theilen annehmet, hinten 4 Nullen anhängt, und mit 1220 in die 0.0040000 dividiret.

Also ist $x=8.6000+0.0032=8.6032$. Wenn ihr die Wurzel noch genauer verlanget; so setzet $x=8.6032+y$. Alsdenn ist

$$x^2=+74015 05024+1720640000y+y^2$$
$$-5x=-4301600000-500000000y$$
$$-31=-3100000000$$

$$0000094976+1220640000y=0$$
$$1220640000y=0000094976$$

$$y=0000094976:1220640000$$
$$y=0000077808.$$

Also ist $x=860327 7808$.

Man soll ferner die Wurzel aus der cubischen Gleichung $x^3+2x^2-23x-70=0$ ausziehen. Setzet,

$$5+y=x$$

so ist $x^3=+125+75y\ldots$
$$+2x^2=+50+20y$$
$$-23x=-115-23y$$
$$-70=-70$$

$$-10+72y=0$$
$$72y=10$$

$$y=0.1.$$

Also ist $x=5+0.1=5.1$.

Setzet

Setzet ferner, $x = 5.1 + y$; so ist

$$x^3 = + 132651 + 78030y \ldots$$
$$+ 2x^2 = + 52020 + 20400y \ldots$$
$$-23x = -117300 - 23000y.$$
$$-70 = - 70000$$

$$- 2629 + 75430y = 9$$

$$75430y = 2629$$

$$y = 0.0348.$$

Also ist $x = 5.1 + 00348 = 5.348.$

Wollte man die Wurzel noch genauer haben; so setzte man $x = 5.348 + y$, und suchte den Werth von y, wie vorhin.

Wenn ihr die Wurzel geschwinder in vielen Zahlen genau haben wollet; so müsset ihr noch den Werth von y^2 beybehalten, und die quadratische Gleichung auf gewöhnliche Art (§. 83.) auflösen, nur daß ihr zehentheilige Brüche behaltet. Nämlich wenn $x = 5 + y$; so ist

$$x^3 = + 125 + 75y + 15y^2 \ldots$$
$$+ 2x^2 = + 50 + 20y + 2y^2$$
$$-23x = -115 - 23y$$
$$-70 = - 70$$

$$-10 + 72y + 17y^2 = 0$$

$$17y^2 + 72y = 10$$

$$y^2 + 42352y = 058823530$$
$$448422976 = 448422976$$

$$y^2 + 42352y + 448422976 = 507246506$$

$$y + 21176 = 22522$$

$$y = 01346.$$

Also ist $x = 5.1346.$

Wolltet

Wolltet ihr nun setzen, $x=5.1346+y$, und wie vorhin den Werth von y finden; so würdet ihr gleich durch die andere Rechnung sehr weit hinauf kommen.

Die 1. Anmerkung.

341. In meinen Element. Analys. (§. 327.) habe ich gewiesen, wie auf diese Art gar leicht die Regel des Herrn *Halley* heraus gebracht werde, aus welcher man in Engelland sehr viel macht. Allein weil die gegebene Regel eben so geschwind den Werth der Wurzel in so kleinen Theilen giebt, und doch viel leichter als die Halleyanische zu behalten ist, indem sie die Klarheit ihres Beweises mit sich führet: so kann man am sichersten bey derselben verbleiben.

Die 2. Anmerkung.

342. Nun könnte ich auch zeigen, wie der Werth von x in den gegebenen Gleichungen geometrisch gesucht wird. Allein, weil die geometrische Ausführung der determinirten Aufgaben sich am besten aus der Ausführung der undeterminirten herleiten läßt; so will ich zuerst arithmetische Exempel von dergleichen Aufgaben beybringen, zumal, da sie in der höhern Geometrie und der Differentialrechnung mehr Nutzen haben, als wohl einige vermeinen, auch besondere Kunstgriffe nachzusinnen an die Hand geben.

Von den undeterminirten Aufgaben.

Die 117. Aufgabe.

343. **Vier Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß die Summe der beyden ersten der dritten, und ihre Differenz der vierten Zahl gleich sey.**

Auflösung.

Es sey die erste Zahl x, die andere y, die dritte z, die vierte t, so ist

$y+x$

$$y+x=z \qquad x-y=t$$
$$2y+t=z \qquad x=t+y$$
$$2y=z-t \qquad x=t+\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}t$$
$$y=(z-t):2 \qquad x=(z+t):2.$$

Da nun nicht mehr Gleichungen zu erdenken sind, so können die Zahlen z und t nach Belieben angenommen werden. Es sey $z=8$, $t=2$; so ist $x=(8+2):2=10:2=5$, und $y=(8-2):2=6:2=3$. Es sey $z=5$, $t=1$; so ist $x=(5+1):2=6:2=3$, $y=(5-1):2=4:2=2$.

Anmerkung.

344. Wenn ihr ganze Zahlen verlanget, so müssen vor z und t solche angenommen werden, deren Summe und Differenz sich durch 2 dividiren läßt.

Die 118. Aufgabe.

345. Zwo Zahlen zu finden, deren Summe zugleich mit ihrem Producte einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey die gegebene Zahl $=a$, die eine von den begehrten $=x$, die andere $=y$, so ist

$$xy+x+y=a$$
$$xy+x=a-y$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; y+1$$
$$x=(a-y):(y+1).$$

Es sey $a=30$, $y=2$, so ist $x=(30-2):(2+1)=28:3=9\tfrac{1}{3}$. Es sey $a=20$, $y=2$, so ist $x=(20-2):(2+1)=18:3=6$: Es sey $a=19$, $y=4$, so ist $x=(19-4):(4+1)=15:5=3$.

Die 119. Aufgabe.

346. Zwo Zahlen zu finden, deren Product ein vollkommener Cubus ist, dessen Wurzel dem Producte aus der ersten in das Quadrat der andern gleich ist.

Auflösung.

Es sey die erstere Zahl $=x$, die andere $=y$, die Cubicwurzel $=v$; so ist

$$v=xy^2 \qquad\qquad xy=v^3$$

$$v:y^2=x \qquad\qquad x=v^3:y$$

$$v:y^2=v^3:y$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; y^2$$

$$v=v^3y$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; v$$

$$1=v^2y$$

$$1:v^2=y.$$

Derowegen ist $v^5=x$:

Setzet $v=2$; so ist $x=32$, $y=\frac{1}{4}$. Es sey $v=3$; so ist $x=243$, $y=\frac{1}{9}$.

Die 120. Aufgabe.

347. Die Summe zweyer vollkommenen Quadrate in zwey andere vollkommene Quadrate zu theilen.

Auflösung.

Es sey die Seite des größern Quadrats $=a$, des kleinern $=b$: die Seite des einen von den gesuchten $a-z$, des andern $yz-b$.

So

So ist

$$aa - 2az + zz + y^2z^2 - 2byz + bb = aa + bb$$

$$zz + yyzz = 2byz + 2az \quad | \; z$$

$$z + yyz = 2by + 2a \quad | \; 1 + y^2$$

$$z = (2by + 2a) : (y^2 + 1)$$

Also ist $a - z = a - (2by + 2a) : (y^2 + 1) = (ay^2 + a - 2by - 2a) : (y^2 + 1) = (ay^2 - 2by - a) : (y^2 + 1)$. Hingegen $yz - b = (2by^2 + 2ay) : (y^2 + 1) - b = (2by^2 + 2ay - by^2 - b) : (y^2 + 1) = (by^2 + 2ay - b) : (y^2 + 1)$.

Es sey $a = 3$, $b = 2$, $y = 2$; so ist $z = (8 + 6) : 5 = 14 : 5$, folglich $a - z = 3 - 14 : 5 = \frac{1}{5}$, und $yz - b = 28 : 5 - 2 = (28 - 10) : 5 = 18 : 5$. Deren Quadrate $(1 + 324) : 25 = 13 = 9 + 4$.

Man nimmt die beyden Seiten $a - z$ und $yz - b$ an, weil von der Summe der beyden Quadrate sich $aa + bb$ muß abziehen, und das Uebrige durch z dividiren lassen, wenn der Werth von z rational seyn soll.

Die 121. Aufgabe.

348. Zwey vollkommene Quadrate zu finden, deren Differenz einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey die Seite des kleinern $= x$, des größern $x + y$, die Differenz $= d$. So ist das kleine Quadrat $= x^2$, das große $x^2 + 2xy + y^2$, folglich

$$y^2 + 2xy = d$$

$$2xy = d - y^2$$

$$x = (d - y^2) : 2y$$

Weil

Weil sich y^2 von d abziehen läßt, so muß y kleiner seyn als $\sqrt{d}$.

Z. E. Es sey $d=10$, $y=3$; so ist $x=(10-9):6 = \frac{1}{6}$, $x+y=3+\frac{1}{6}$. Es sey $d=11$, $y=2$; so ist $x=(11-4):4=\frac{7}{4}$, $x+y=2+\frac{7}{4}=\frac{15}{4}$.

Man nimmt die Seite des großen Quadrats $x+y$ an, und nicht bloß y, damit der Werth von x rational gefunden wird.

Die 122. Aufgabe.

349. **Eine Zahl in zwo andere zu zertheilen, deren Product ein vollkommenes Quadrat ist.**

Auflösung.

Es sey die Zahl $=2a$, die Differenz $=2y$; so ist die große $a+y$, die kleine $a-y$ (§. 61.), ihr Product $=aa-yy$. Setzet die Seite des Quadrats $xy-a$. So ist

$$aa-yy=aa-2axy+x^2y^2$$

$$2axy=x^2y^2+y^2$$

$$\overline{}\; y$$

$$2ax=x^2y+y$$

$$\overline{}\; x^2+1$$

$$2ax:(x^2+1)=y.$$

Es sey $x=2$, $2a=10$; so ist $y=20:5=4$, $a+y=5+4=9$, $a-y=5-4=1$.

Es sey $2a=10$, $x=0$; so ist $y=0$, folglich $a+y=5$, $a-y=5$.

Es sey $2a=10$, $x=3$; so ist $y=30:10=3$, $a+y=5+3=8$, $a-y=5-3=2$.

Die Seite des Quadrats wird $xy-a$ angenommen, damit man in der Gleichung aa weg-

brin-

bringen, und das Uebrige durch y dividiren kann, damit der Werth von y rational gefunden wird.

Die 123. Aufgabe.

350. Zwo Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine zu dem Quadrate der andern gesetzt wird, die Summe ein Quadrat sey, deren Seite die Summe der Zahlen ist.

Auflösung.

Es sey die eine Zahl x, die andere y; so ist

$$x^2+y=x^2+2xy+y^2$$

$$y-y^2=2xy \quad | \; 2y$$

$$(1-y):2=x.$$

Es sey $y=\frac{1}{2}$; so ist $x=\frac{1}{2}:2=\frac{1}{4}$. Es sey $y=\frac{1}{3}$; so ist $x=(1-\frac{1}{3}):2=\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}$.

Die 124. Aufgabe.

351. Zwo Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine zu dem Quadrate der andern gesetzt wird, die Summe die Seite eines Quadrats sey, welche den beyden Zahlen gleich ist.

Auflösung.

Es sey die eine Zahl z, die andere y; so ist

$$z^2+y=\surd(z+y)$$

$$z^4+2z^2y+yy=z+y$$

$$z^4+2z^2y-y+yy=z,$$

das ist, wenn $2z^2-1=v$,

$$vy + yy = z - z^4$$

$$\tfrac{1}{4}v^2 + vy + yy = \tfrac{1}{4}v^2 + z - z^4$$

$$\tfrac{1}{2}v + y = \sqrt{(\tfrac{1}{4}v^2 + z - z^4)}$$

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{4}v^2 + z - z^4)} - \tfrac{1}{2}v,$$

das ist, wenn ihr für v wieder seinen Werth in die Stelle setzet,

$$y = \sqrt{(z^4 - z^2 + \tfrac{1}{4} + z - z^4)} - z^2 + \tfrac{1}{2},$$

das ist $y = \sqrt{(\tfrac{1}{4} + z - z^2)} + \tfrac{1}{2} - z^2.$

Wenn ihr nun Rationalzahlen verlanget; so muß $\tfrac{1}{4} + z - z^2$ ein vollkommenes Quadrat seyn.

Setzet demnach seine Seite $= zx - \tfrac{1}{2}$ (§. 349.); so ist

$$z^2x^2 - zx + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + z - z^2$$

$$z^2x^2 - zx = z - z^2$$

$$: z$$

$$zx^2 - x = 1 - z$$

$$zx^2 + z = x + 1$$

$$z = (x+1):(x^2+1).$$

Es sey $x=2$; so ist $z=(2+1):(4+1)=\tfrac{3}{5}$, folglich $y = \tfrac{1}{2} - \tfrac{9}{25} + \sqrt{(\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{5} - \tfrac{9}{25})} = (25-18):50 + \sqrt{((25+24):100)} = 7:50 + \sqrt{(49:100)} = \tfrac{7}{50}$

$$+ \tfrac{7}{10} = \frac{70+350}{500} = \tfrac{420}{500} = \tfrac{21}{25}.$$

Die 125. Aufgabe.

352. Zwey Quadrate von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihr das eine zu dem Producte von beyden addiret, eine jede Summe ein vollkommenes Quadrat sey.

Auflö-

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2, das andere y^2, so ist ihr Product x^2y^2; folglich sind $x^2y^2+x^2$ und $x^2y^2+y^2$ vollkommene Quadrate. Dividiret das erstere durch x^2, das andere durch y^2; so sind y^2+1 und x^2+1 gleichfalls vollkommene Quadrate. Nennet die Seite des erstern $z-y$, des andern $t-x$, damit sich y^2 und x^2 subtrahiren läßt, folglich der Werth von y und x rational gefunden werden mag; so ist

$y^2+1=z^2-2zy+y^2$,	$x^2+1=t^2-2tx+x^2$
$1=z^2-2zy$	$1=t^2-2tx$
$1+2zy=z^2$	$2tx=t^2-1$
$y=(z^2-1):2z$	$x=(t^2-1):2t.$

Es sey $z=2$, $t=3$; so ist $y=(4-1):4=\frac{3}{4}$ und $x=(9-1):6=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

Es sey $z=3$, $t=4$; so ist $y=(9-1):6=\frac{3}{4}$, $x=(16-1):8=\frac{15}{8}$.

Die 126. Aufgabe.

353. Zwey Quadrate von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihre Summe zu ihrem Producte gesetzt wird, ein vollkommenes Quadrat heraus kommt.

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2, das andere y^2, so ist $x^2y^2+x^2+y^2$ ein vollkommenes Quadrat. Setzet anfangs aus vorhin (§. 352.) angeführtem Grunde.

$$y^2 - 2ty + tt = yy + 1$$

so ist $t^2 = 1 + 2ty$

$$(t^2 - 1) : 2t = y$$
$$t - y = t - (t^2 - 1) : 2t = (t^2 + 1) : 2t.$$

Setzet ferner $v = \surd(yy + 1) = t - y = (t^2 + 1) : 2t$; so ist $x^2y^2 + x^2 + y^2 = x^2v^2 + y^2$. Stellet dessen Seite $= z - vx$ (§. 349.); so ist

$$x^2v^2 + y^2 = z^2 - 2vxz + v^2x^2$$
$$y^2 = z^2 - 2vxz$$
$$2vxz = z^2 - y^2$$
$$x = (z^2 - y^2) : 2vz.$$

Hier werden z und t nach Gefallen angenommen.

Es sey z. E. $z = 2$, $t = 3$; so ist $y = (9 - 1) : 6 = 8 : 6 = \frac{4}{3}$, $v = t - y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$, und also $x = (4 - \frac{16}{9}) : \frac{20}{3} = \frac{36 - 16}{9} : \frac{20}{3} = \frac{20}{9} : \frac{20}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Die 127. Aufgabe.

354. Zwo Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihr Product zu der Summe ihrer Quadrate gesetzt wird, ein vollkommenes Quadrat herauskommt.

Auflösung.

Es sey die Summe der beyden Zahlen $2x$, ihre Differenz $2y$, die Seite des Quadrats $t + y$; so ist die größere Zahl $x + y$, die kleinere $x - y$, und demnach

$$x^2+2xy+y^2$$
$$x^2-2xy+y^2$$
$$x^2 \quad -y^2$$
folglich
$$3x^2+y^2=t^2+2ty+yy$$

$$3x^2-t^2=2ty$$
$$2t$$
$$(3x^2-t^2):2t=y.$$

Es sey $x=4$, $t=6$; so ist $y=(48-36):12=12:12=1$, folglich $x+y=4+1=5$, $x-y=4-1=3$.

Die 128. Aufgabe.

355. Eine Zahl von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn sie durch zwo bekannte Zahlen multiplicirt wird, beyde Producte ein vollkommenes Quadrat sind.

Auflösung.

Es sey die eine gegebene Zahl $=a$, die andere $=b$, die gesuchte $=x$, das eine Quadrat y^2, das andere v^2; so ist

$$ax=y^2 \qquad\qquad bx=v^2$$
$$x=y^2:a \qquad\qquad x=v^2:b$$

$$y^2:a=v^2:b$$
$$by^2=av^2$$
$$y^2=av^2:b$$
$$y=v\sqrt{(a:b)}.$$

Wenn demnach eine Rationalzahl gefunden werden soll; so muß $a:b$ ein vollkommenes Quadrat seyn.

Es sey $a=32$, $b=8$; so ist $\sqrt{(a:b)}=2$. Setzet $v=5$; so ist $y=10$, folglich $x=\frac{25}{8}$.

Die 129. Aufgabe.

356. Eine Zahl zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn sie durch zwo gegebene Zahlen multiplicirt, und zu jedem Producte noch eine andere Zahl addirt wird, beyderseits ein vollkommenes Quadrat herauskommt.

Auflösung.

Es seyn die ersten beyden gegebenen Zahlen a und b, die andern c und d, die gesuchte x, die beyden Quadrate yy und vv; so ist

$$ax+c=yy \qquad bx+d=vv$$

$$x=(yy-c):a \qquad x=(vv-d):b$$

$$(yy-c):a=(vv-d):b$$

$$byy-bc=avv-ad$$

$$byy=av^2-ad+bc$$

$$b$$

$$y^2=(av^2-ad+bc):b$$

$$y=\sqrt{((av^2-ad+bc):b)}.$$

Wenn ihr nun eine Rationalzahl verlanget, so setzet $a:b=m^2$; so ist

$$y^2=m^2v^2-m^2d+c.$$

Setzet ferner für die Seite dieses Quadrats $t-mv$, oder $mv-t$ (§. 349.); so ist

m^2v^2

$$m^2v^2 - m^2d + c = m^2v^2 - 2tmv + t^2$$

$$2tmv = t^2 + m^2d - c$$

$$v = (t^2 + m^2d - c) : 2tm.$$

das ist, wenn ihr für m^2 seinen Werth wieder hinsetzet $v = (bt^2 + ad - bc) : 2tbm$.

Es sey $t = 4$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$; so ist $m^2 = 1 : 1 = 1$, und $m = 1$, folglich $v = (16 + 3 - 2) : 8 = 17 : 8 = 2\frac{1}{8}$, und $x = 289 : 64 - 3 = (289 - 192) : 64 = 97 : 64$.

Von den geometrischen Oertern.

Die 38. Erklärung.

357. Die Linie, durch welche eine undeterminirte Aufgabe geometrisch aufgelöset wird, heißt ein geometrischer Ort (Locus geometricus). Insonderheit nennet man es einen Ort an einer geraden Linie, wenn sie eine gerade Linie ist; einen Ort an dem Circul, wenn sie ein Circul; einen Ort an der Parabel, Hyperbel, *ELLIPSI* u. s. w. wenn sie eine von diesen Linien ist.

Die 39. Erklärung.

358. Der Ort an einer geraden Linie wird ein einfacher Ort (Locus simplex); der an einem Circul, ein ebener Ort (Locus planus); der an einer Parabel, Hyperbel und *Ellipsi*, ein körperlicher Ort (Locus solidus) genennet.

Die 130. Aufgabe.

359. Einen Ort an einer geraden Linie zu beschreiben.

Auflösung.

Einen Ort beschreiben heißt die Linie ziehen, welche der undeterminirten Aufgabe ein Gnügen thut. Alle Oerter an einer geraden Linie lassen sich durch folgende Gleichungen vorstellen:

$$y = \frac{ax}{b} \qquad y = \frac{ax}{b} \pm c \qquad y = c - \frac{ax}{b}.$$

Tab. V. Fig. 45. Ziehet also eine gerade Linie AB, und machet AI $= b$. Ziehet unter einem beliebigen Winkel EI $= a$. Wenn PM, pm &c. mit EI parallel gezogen werden; so sind AP, Ap &c. $= x$, PM, pm &c. $= y$. Denn (§. 184. *Geom.*).

$$\begin{array}{c} AI : IE = AP : PM \\ b : a = x : y \\ \hline ax : b = y. \end{array}$$

Verlängert EI in G, bis IG $= c$, und ziehet durch G die Linie Dq mit AB, AD mit EG parallel. Wenn PM bis in Q verlängert wird; so ist DQ $=$ AP $= x$, und QM $= \frac{ax}{b} \pm c = y$.

Hingegen machet LG $= b$ und GE $= a$, IG $= c$; so ist QM $= ax : b$ (§. 184. *Geom.*) und PM $= \frac{ax}{b} - c$.

Tab. V. Fig. 46. Endlich sey AC $= c$, und AD $= b$. Ziehet durch D die Linie FE mit AC parallel, und machet DE $= a$. Ziehet ferner die Linie AL, und mit ihr CB, hingegen NM mit AC parallel; so ist PN $= ax : b$ (§. 184. *Geom.*), folglich PM $=$ MN $-$ NP $= c - ax : b$.

Die

Die 131. Aufgabe.

360. Einen jeden Ort an einer Parabel zu beschreiben.

Auflösung.

Es können zween Fälle vorkommen. Denn es beziehen sich die Linien x und y entweder auf die Höhlung, oder das erhabene der Parabel.

Im erstern Falle sey KD=PN=n, AK=p, DH=q, LH=r, DL=s, der Parameter =t, DQ=x, QM=y; so ist (§. 184. *Geom.*). Tab. V. Fig. 47.

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}.$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}.$$

Demnach AP=KP(=DN)—KA=$\frac{sx}{q}-p$, und PM=QM—QN—PN=$y-\frac{rx}{q}-n$, folglich, weil $t.AP=PM^2$ (§. 217.).

$$y^2-\frac{2rxy}{q}+\frac{r^2x^2}{q^2}-2ny+\frac{2nrx}{q}+n^2=\frac{tsx}{q}-tp.$$

das ist:

$$y^2-\frac{2rxy}{q}+\frac{r^2x^2}{q^2}-2ny+\frac{2nrx}{q}+n^2=0-\frac{tsx}{q}+tp$$

Tab. V. Fig. 48. Im andern Falle sey DK=PN=n, AK=p, DH=q, LH=r, DL=s, DQ=LM=y, QM=DI =x; so ist (§. 184. *Geom.*).

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = y : \frac{sy}{q}.$$

Demnach $AP = KP (= DN) - AK = \frac{sy}{q} - p$, und $PM = QM - QN - NP = x - \frac{ry}{q} - n$, folglich, weil $t.AP = PM^2$ (§. 217.),

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2rny}{q} + n^2 = \frac{tsy}{q} - tp$$

das ist:

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2rny}{q} + n^2 = 0 - \frac{tsy}{q} + tp.$$

Wenn ihr nun die Glieder einer gegebenen Gleichung mit den Gliedern einer von den gefundenen vergleichet, so könnet ihr in jedem Falle finden, wie groß die Linien DK, AK, DH und LH in dem vorkommenden Falle anzunehmen sind, oder welche von ihnen gar weg bleiben, und solchergestalt den verlangten Ort beschreiben.

Z. E.

Z. E. Es sey $y^2-ax=0$; so ist, vermöge der ersten Gleichung,

$$-2r=0,\quad -2n=0,\quad -ts=-a,\quad n^2+tp=0$$

$$q \qquad n=0 \qquad q \qquad p=0$$

$$r=0,\ q=s \qquad\qquad t=a$$

Weil demnach LH$=0$, und DK$=0$; so fällt die Tab. V.
Linie DH auf KP, und, weil AK$=0$, der Punct Fig. 47.
K in A, folglich DQ in AP, und QM in PM, und ist weiter nichts nöthig, als daß mit dem Parameter a eine Parabel beschrieben wird. Denn so ist AP$=x$ und PM$=y$.

Wiederum es sey $y^2-ay-bx+\frac{1}{4}aa=0$; so ist, vermöge der ersten Gleichung,

$$-2r=0,\quad -2n=-a,\quad -ts=-b$$

$$q \qquad n=\tfrac{1}{2}a \qquad q$$

$$r=0,\ q=s \qquad\qquad t=b$$

$$n^2+tp=\tfrac{1}{4}aa$$

$$\tfrac{1}{4}aa+bp=\tfrac{1}{4}aa$$

$$bp=0$$

$$p=0.$$

Weil demnach LH$=0$, so fällt DH auf DL. Tab. V.
Weil KA$=0$; so fällt K in A. Solchergestalt Fig. 47.
wird mit dem Parameter b eine Parabel AMR Tab. VI.
beschrieben, auf der Axe AB in A ein Perpen- Fig. 49.
dicul AL$=\frac{1}{2}a$ aufgerichtet, und LQ mit AB, QM aber mit LA parallel gezogen; so ist LQ$=x$, QM $=y$. Denn, weil PM$=y-\frac{1}{2}a$; so ist

$$y^2-ay+\tfrac{1}{4}aa=bx \quad (\S.\ 217.).$$

folglich $y^2-ay-bx+\frac{1}{4}aa=0$.

Es

Es sey $y^2 - ay - bx - cc = 0$; so ist, vermöge der ersten Gleichung,

$$\begin{array}{ccc} -2r = 0 & -2n = -a & -ts = -b \\ \overline{q} & n = \tfrac{1}{2}a & \overline{q} \\ r = 0,\ q = s & & t = b \end{array}$$

$$n^2 + tp = -cc$$

$$\tfrac{1}{4}aa + bp = -cc$$

$$bp = -cc - \tfrac{1}{4}aa$$

$$p = \frac{-cc - \tfrac{1}{4}aa}{b}.$$

Tab. VI. Fig. 50. Beschreibet mit dem Parameter b eine Parabel AMR, und richtet in A auf die Axe AN eine Perpendicularlinie AH auf. Machet AE$=\tfrac{1}{2}a$, AF $=c$; so ist EF$=\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa+cc)}$. Machet EF=AI =AG, und AH$=b$; ziehet die Linie HI, und mit ihr GK parallel; so ist AK$=(cc+\tfrac{1}{4}aa):b$. Wenn nun endlich EQ mit der Axe AN und DK, imgleichen QM mit EA parallel gezogen werden; so ist DQ$=x$, und QM$=y$. Denn AP=EQ=AK +KP$=\frac{cc+\tfrac{1}{4}aa+x}{b}$, und PM$=y-\tfrac{1}{2}a$, folglich weil PM^2=t.AP (§. 217.).

$$y^2 - ay + \tfrac{1}{4}aa = cc + \tfrac{1}{4}aa + bx$$

das ist, $y^2 - ay - bx - cc = 0$.

Die 132. Aufgabe.

361. **Einen Ort an einer *Ellipsi* zu beschreiben.**

Auflö-

Auflösung.

Es sey in C der Mittelpunct der Axe, $CK=p$, $KD=PN=n$, $DH=q$, $LH=r$, $DL=s$, $AC=CB=m$, der Parameter $=t$, $DQ=x$, $QM=y$; so ist (§. 185. *Geom.*). Tab. VI. Fig. 51.

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Daher $CP = DN - KC = \frac{sx}{q} - p$, und $PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n$.

Da nun in der Ellipsi (§. 239.).

$$t : 2m = PM^2 : AP.PB$$

und $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$

$$AP = m + \frac{sx}{q} - p, \text{ und } PB = m - \frac{sx}{q} + p$$

also $AP.PB = m^2 - p^2 + \frac{2psx}{q} - \frac{s^2x^2}{q^2}$;

so ist $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tm^2 - tp^2}{2m} + \frac{2tpsx}{2mq} - \frac{ts^2x^2}{2mq^2}$,

Folg-

Folglich:

$$\frac{y^2-2rxy}{q}+\frac{r^2x^2}{q^2}-2ny+\frac{2nrx}{q}+n^2=0+\frac{ts^2x^2}{2mq^2}-\frac{2tpsx}{2mq}+\frac{tp^2}{2m}-\frac{tm^2}{2m}.$$

Wenn ihr die vorgegebenen Gleichungen, wie vorhin in der Parabel, mit dieser allgemeinen vergleichet; so werdet ihr in jedem Falle den Ort an der Ellipsi beschreiben können.

Z. E. Es sey $y^2+\frac{cx^2}{b}+\frac{cdx}{b}-\frac{a^2c}{b}=0$;

so ist $-\frac{2r}{q}=0$

$\frac{ts}{2mq^2}=\frac{c}{b}$ $\quad -2n=0$, $n=0$ $\quad -\frac{2tps}{2mq}=\frac{cd}{b}$

$r=0, q=s$ $\quad \frac{t}{2m}=\frac{c}{b}$ $\quad -2p=d$, $p=-\frac{1}{2}d$

$$\frac{tp^2}{2m}-\frac{tm^2}{2m}=-\frac{a^2c}{b}$$

$$\frac{cp^2}{b}-\frac{cm^2}{b}=-\frac{a^2c}{b}$$

$$p^2-m^2=-a^2$$

$$\tfrac{1}{4}dd+aa=m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}dd+aa)}=m.$$

Richtet

Richtet demnach auf der Linie AB in C die Linie CE$=a$ perpendicular auf, und machet KC$=\frac{1}{2}d$; so ist KE$=\surd(\frac{1}{4}dd+aa)$. Machet CA=CB=KE; so ist AB die Axe der Ellipsis. Machet ferner CH $=b$ und CI$=c$; ziehet die Linie HI, und mit ihr AG parallel; so ist GC der halbe Parameter. Machet endlich CO=CG, und beschreibet über AO einen halben Circul; so ist CL die halbe kleine Axe, und ihr könnet die Ellipsin ALB (§. 257.) beschreiben, in welcher KP$=x$, und PM$=y$. Denn CP$=x+\frac{1}{2}d$, AP$=\surd(\frac{1}{4}dd+aa)+x+\frac{1}{2}d$, PB$=\surd(\frac{1}{4}dd+aa)-x-\frac{1}{2}d$, und daher AP.PB $=aa-xx-dx$. Da nun $c:b=\text{PM}^2:\text{AP.PB}=y^2:aa-xx-dx$ (§. 239.); Tab. VI. Fig. 52.

$$\text{so ist } y^2 = \frac{a^2c}{b} - \frac{cx^2}{b} - \frac{cdx}{b}$$

$$\text{folglich } y^2 + \frac{cx^2}{b} + \frac{cdx}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$$

Zusatz.

362. Wenn man $t=2m$ setzet, so kommt die Gleichung für alle Oerter in dem Circul.

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0 + \frac{fx^2}{q^2} - \frac{2pfx + p^2}{q - m^2}.$$

Die 133. Aufgabe.

363. Einen Ort an einer Hyperbel zu beschreiben.

Auflö=

Auflösung.

Tab. VI. Fig. 53. Es sey die Zwerchaxe $AB=2m$, in C der Mittelpunct $CK=p$, $KD=PN=n$, $DH=q$, $LH=r$, $DL=s$, $DQ=x$, $QM=y$, der Parameter $=t$; so ist (§. 185. *Geom.*).

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}.$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}.$$

Also ist $CP = DN (= KP) - CK = \frac{sx}{q} - p$, und

$PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n.$

Nun ist $t : 2m = PM^2 : AP.PB$ (§. 260.), und

$PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2,$

$AP.PB = (CP - CA)(CP + CA) = CP^2 - CA^2$
$= \frac{s^2x^2}{q^2} - \frac{2psx}{q} + p^2 - m^2.$

Derowegen:

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{ts^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpsx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m}$$

folglich: $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$

$$- \frac{ts^2x^2}{2mq^2} + \frac{2tpsx}{2mq} + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m}$$

Wel-

Welche Gleichung eben so, wie die vorigen, gebraucht wird (§. 360. 361.).

Die 134. Aufgabe.

364. **Einen Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zu beschreiben.**

Auflösung.

Es seyn SA und AR die Asymptoten einer Hyperbel. Ziehet DL mit der einen AR parallel, und nach Belieben die Linie DH; hingegen KD, QM, LH, IR mit der andern AS parallel. Es sey ferner KD=PN=n, KA=p, DH=q, LH=r, DL=s, DQ=x, QM=y, RI=m, AR=DL=s; so ist (§. 184. *Geom.*). Tab. VI. Fig. 54.

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Derowegen ist $AP = DN - AK = \frac{sx}{q} - p$,

und $PM = QM - PN - NQ = y - n - \frac{rx}{q}$,

Folglich:

Weil AR.RI=AP.PM (§. 282.)

$$ms = \frac{syx}{q} - \frac{srx^2}{q^2} - py - \frac{snx}{q} + \frac{prx}{q} + pn$$

$$qms = syx - \frac{srx^2}{q} - qpy - snx + prx + pnq$$

$$qm = yx - \frac{rx^2}{q} - \frac{qpy}{s} - nx + \frac{prx}{s} + \frac{pnq}{s}$$

$$yx - \frac{rx^2}{q} - \frac{qpy}{s} + \frac{prx}{s} + \frac{pnq}{s} = 0 - ny - qm.$$

Tab. VI. Fig. 55. Wenn alles, wie vorhin, bleibt, nur daß TM mit DH parallel gezogen, und QM=DT=x, hingegen TM=QD=y angenommen wird; so findet man, wie vorhin

$$xy - \frac{ry^2}{q} - \frac{pqx}{s} + \frac{pry}{s} + \frac{pnq}{s} = 0 - ny - mq.$$

Welche beyden Gleichungen eben wie die vorigen gebraucht werden.

Anmerkung.

365. Wenn man die gefundenen allgemeinen Gleichungen für die geometrischen Oerter gegen einander hält; so wird man folgende Regeln wahrnehmen, durch welche man urtheilen kann, ob eine gegebene Gleichung ein Ort an einer Parabel, oder Ellipsi, oder Hyperbel, oder einem Circul sey. Nämlich, wenn xy in einer Gleichung vorhanden ist, und 1) nur ein Quadrat entweder von x, oder von y durch andere Größen multiplicirt, vorkommt; so ist der Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten. 2) Wenn das Quadrat von x oder y durch das Quadrat der halben Größe multiplicirt ist, durch welche man xy multiplicirt befindet; so ist der Ort an einer Parabel. 3) Wenn x^2 und y^2 beyde das Mehrzeichen + haben; so ist der Ort an einer

einer Ellipsi, oder einem Circul: und zwar siehet man, daß er an einem Circul sey, wenn man $t:2m=1$ findet. 4) Endlich, wenn x^2 und y^2 verschiedene Zeichen haben; so ist der Ort an einer Hyperbel, welche um ihre Axe beschrieben worden ist: welche beyde letztern Regeln 5) auch gelten obgleich xy fehlet. Hingegen ist 6) in diesem letztern Falle in dem Orte an der Parabel auch x^2 nicht vorhanden.

Die 135. Aufgabe.

366. Eine cubische und biquadratische Gleichung geometrisch auszuführen.

Auflösung.

1. Wenn in der Gleichung nur eine unbekannte Größe vorhanden ist, als y, so nimmt man noch eine x dazu, und bringet die vorgegebene Gleichung auf geometrische Oerter.
2. Wenn man zween von diesen Oertern gebührend beschreibt, daß nämlich die Linien x und y beyderseits auf einander fallen; so giebt der Durchschnitt beyder Oerter den verlangten Werth von y.

Z. E. Die vorgegebene Gleichung sey $y^3+aby=a^2c$; so ist $a:y=y^2+ab:ac$

Setzet: $a:y=y:x$

so ist I. $ax=y^2$

daher $x=y^2:a$

imgleichen $y:x=y^2+ab:ac$

$=ax+ab:ac$

$=x+b:c$

II. $x^2+bx=cy$.

$ax=y^2$	$ax=y^2$
$x^2+bx=cy$	$x^2+bx=cy$
III. $ax-x^2-bx=y^2-cy$.	IV. $ax+x^2+bx=y^2+cy$

Ferner $x^2+bx=cy$ $\qquad$ $y^3+aby=a^2c$

das ist $x^2+\frac{by^2}{a}=cy$ $\qquad$ $axy+aby=a^2c$

$$\text{V. } y^2+\frac{ax^2}{b}=\frac{acy}{b} \qquad \text{VI. } xy+by=ac.$$

Solchergestalt findet man

I. $y^2-ax=0$ an der Parabel.

II. $x^2+bx-cy=0$ an der äussern Parabel.

III. $y^2+x^2-cy\begin{matrix}+bx\\-ax\end{matrix}=0$ an dem Circul.

IV. $y^2-x^2+cy\begin{matrix}-ax\\-bx\end{matrix}=0$ an der Hyperbel.

V. $y^2+\frac{ax^2}{b}-\frac{acy}{b}=0$ an der Ellipsi.

VI. $xy+by-ac=0$ an der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

Weil sich der Circul am leichtesten beschreiben läßt; so kann man ihn mit einem von den übrigen fünf Oertern beschreiben, und dadurch den Werth von y finden.

Tab. VII. Fig. 56. Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel (§. 220.); so ist in ihr eine jede Abscisse DP$=x$, eine jede Semiordinate aber PM $=y$ (§. 217.).

Für den Circul ist (§. 362.).

$$\frac{2r}{q}=0 \qquad -2n=-c \qquad -2p=b-a$$

$$r=0,\ q=s \qquad n=\tfrac{1}{2}c \qquad p=\frac{b-a}{2}$$

$$n^2+p^2=m^2$$

$$\text{das ist } \tfrac{1}{4}c^2+(\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b)^2=m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2+(\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b)^2)}=m.$$

Dero-

Derowegen traget auf eine gerade Linie AB aus C in K$=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, und richtet in K die Linie KD$=\frac{1}{2}c$ perpendicular auf; so ist CD der Radius des Circuls DAMB. Wenn ihr selbigen beschrieben habt; so ziehet DP mit AB parallel, und ihr habt DP$=x$, PM$=y$. Tab. VII. Fig. 57.

Nun siehet man leicht, wie der Circul mit der Parabel zu vereinigen sey, damit die Linien DP und PM auf einander fallen. Richtet nämlich in D die Linie DK$=\frac{1}{2}c$ perpendicular auf; ziehet KQ mit DP parallel, und machet KC$=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$. Endlich beschreibet mit CD durch den Scheitelpunct D den Circul; so ist PM$=y$. Tab. VII. Fig. 56. 57.

Denn DP$=$KQ$=\frac{y^2}{a}$ (§. 222.), und daher

CQ$=$KQ$-$KC$=\frac{y^2}{a}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$. Ferner ist

QM$=$PM$-$DK$=y-\frac{1}{2}c$, folglich:

$$QC^2=\frac{y^4}{a^2}-y^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{by^2}{a}-\frac{ab}{2}+\frac{1}{4}bb$$

$$QM^2=y^2-cy+\frac{1}{4}cc$$

$$CM^2=\frac{y^4}{a^2}+\frac{by^2}{a}-cy+\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}a^2-\frac{ab}{2}+\frac{1}{4}b^2$$

$$CM^2=DC^2=\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2 \quad \textit{subtr.}$$

$$\frac{y^4}{a^2}+\frac{by^2}{a}-cy=0$$

$$y:a^2$$

$$y^3+aby-a^2c=0.$$

Auf eben solche Art kann man die Oerter an der Ellipsi und der Hyperbel beschreiben, und den Circul darauf tragen, damit man den Werth von y

findet: welches in folgenden Aufgaben durch wahre Exempel soll erkläret werden.

Es sey die vorgegebene Gleichung $y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d$. Weil $y^4 + 2by^3 = a^3d - a^2cy$; so ist

$$a^2 : y^2 = y^2 + 2by : ad - cy.$$

Setzet: $a : y = b + y : x$

so ist I. $ax = by + y^2$

$$ax - by = y^2$$

daher $a^2 : ax - by = ax + by : ad - cy$

II. $a^3d - a^2cy = a^2x^2 - b^2y^2$

Setzet ferner für y^2 seinen Werth $ax - by$; so ist

$$\frac{a^3d - a^2cy = a^2x^2 - ab^2x + b^3y}{a^2}$$

folglich III. $ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2x}{a}$

$$y^2 + by = ax$$

IV. $y^2 + by + ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} = x^2 + ax - \frac{b^2x}{a}$

V. $y^2 + by - ad + cy + \frac{b^3y}{a^2} = ax - x^2 + \frac{b^2x}{a}$.

Solchergestalt findet man

I. $y^2 + by - ax = 0$ an der Parabel.

II. $y^2 - \frac{a\,x^2}{b^2} - \frac{a^2cy}{b^2} + \frac{a^3d}{b^2} = 0$ an der Hyperbel.

III. $x^2 - \frac{b^2x}{a} + cy - ad = 0$ an der äussern Parabel.

$+ \frac{b^3y}{a^2}$

IV.

IV. $y^2 - x^2 - \frac{b^3y}{a^2} + \frac{b^2x}{a} + ad = 0$ an der gleichseitigen Hyperbel.
$\quad + by - ax$
$\quad - cy$

V. $y^2 + x^2 + \frac{b^3y}{a^2} - \frac{b^2x}{a} - ad = 0$ an dem Circul.
$\quad + by - ax$
$\quad + cy$

Wenn man nun alle diese Oerter (§. 360. 362. 363.) beschreibt, und die an den Kegelschnitten mit dem an dem Circul, wie vorhin, verknüpfet; so hat man der gegebenen Gleichung auf fünferley Art ein Genügen gethan.

Anmerkung.

367. Ich halte es für rathsamer, daß ich die vornehmsten Fälle, welche vorkommen können, durch wahre Exempel erläutere.

Die 136. Aufgabe.

368. Zwischen zwoen gegebenen Linien zwo stäts mittlere Proportionallinien zu finden.

Auflösung.

Es sey die kleinere $= a$, die größere $= b$, von den gesuchten die kleinere $= y$, die größere $= x$; Tab. VII. Fig. 58.

so ist

$a : y = y : x$	$y : x = x : b$
I. $ax = y^2$	II. $by = x^2$
$a : y = x : b$	$y^2 = ax$
III. $ab = xy$	IV. $by - y^2 = x^2 - ax$

$$ax = y^2 \qquad\qquad x^2 = by$$
$$x^2 = by \qquad\qquad \overline{}\ 2$$
$$\overline{} \qquad\qquad \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}by$$
$$\text{V. } x^2 + ax = y^2 + by \qquad\qquad ax = y^2$$

$$\text{VI. } \tfrac{1}{2}x^2 + ax = \tfrac{1}{2}by + y^2$$
$$\text{VII. } ax - \tfrac{1}{2}x^2 = y^2 - \tfrac{1}{2}by.$$

Solchergestalt bekommt man folgende Oerter:

I. $y^2 - ax = 0$ an der Parabel.
II. $x^2 - by = 0$ an der äussern Parabel.
III. $xy - ab = 0$ an der Hyperbel zwischen den Asymptoten.
IV. $y^2 + x^2 - by - ax = 0$ an dem Circul.
V. $y^2 - x^2 + by - ax = 0$ an der gleichseitigen Hyperbel.
VI. $y^2 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}by - ax = 0$ an der ungleichseitigen Hyperbel.
VII. $y^2 + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}by - ax = 0$ an der Ellipsi.

Tab. VII. Fig. 59. I. Wenn man demnach mit dem Parameter a eine Parabel DCM beschreibt; so ist der erste Ort beschrieben, und $DQ = x$, $QM = y$.

Für den Circul ist (§. 362.)

$$-2r = 0 \qquad -2n = -b \qquad -2p = -an^2 + p^2 = m^2$$
$$\overline{q} \qquad n = \tfrac{1}{2}b \qquad p = \tfrac{1}{2}a\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$
$$r = 0,\ q = \int \qquad\qquad\qquad = m$$

Tab. VII. Fig. 60. Traget also auf eine gerade Linie BG aus C in $K = \tfrac{1}{2}a$, richtet in K den Perpendicul $KD = \tfrac{1}{2}b$ auf; so ist $CD = \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$ der Radius des Circuls DBMG, und darinnen $DQ = x$, $QM = y$.

Tab. VII. Fig. 59. Weil nun der Punct D in den Scheitelpunct der Parabel fällt; so richtet auf der Axe DQ die Linie $DK = \tfrac{1}{2}b$ perpendicular auf, ziehet aus K die Linie KG mit DQ parallel, machet $KC = \tfrac{1}{2}a$,

und

und beschreibet aus C durch D den Circul DBMG; so ist DQ=x, und QM=y in dem gegebenen Falle.

Wenn man in der Gleichung $xy=ab$ vor x seinen Werth $y^2:a$ aus der Gleichung $ax=y^2$ setzet: so bekommt man $y^3=a^2b$, oder $y^3-a^2b=0$. Und diese Gleichung dienet zu erweisen, daß die Linie y recht gefunden worden sey. Denn, weil DK$=\frac{1}{2}b$, und KC$=\frac{1}{2}a$; so ist DC$^2=\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb$ (§. 172. *Geom*). Wiederum, weil QM=y, und der Parameter von der Parabel $=a$; so ist DQ=KP$=y^2:a$ (§. 222.), und daher CP$=y^2:a-\frac{1}{2}a$, hingegen PM$=y-\frac{1}{2}b$, folglich:

$$CP^2=\frac{y^4}{a^2}-y^2+\frac{1}{4}aa$$

$$PM^2=y^2-by+\frac{1}{4}bb$$

$$CM^2=\frac{y^4}{a^2}-by+\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb,$$

$$CM^2=CD^2=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2$$

$$\frac{y^4}{a^2}-by=0$$

$$\overline{\qquad\qquad}\; y:a^2$$

$$y^3-a^2b=0.$$

II. Für die Ellipsin ist (§. 361.)

$$\frac{-2r}{q}=0 \qquad \frac{t}{2m}=\frac{1}{2} \qquad -2n=\frac{1}{2}b$$

$$r=0,\ q=f \qquad t:2m=1:2 \qquad n=\frac{1}{4}b$$

$$-2tp = -a \qquad n^2 - tm^2 + tp^2 = 0$$

$$\frac{}{2m} \qquad\qquad \frac{}{2m}\ \frac{}{2m}$$

$$p = a \qquad \tfrac{1}{16}b^2 - \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{2}a^2 = 0$$

$$\tfrac{1}{16}b^2 + \tfrac{1}{2}a^2 = \tfrac{1}{2}m^2$$

$$2$$

$$\tfrac{1}{8}b^2 + a^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{8}b^2 + a^2)} = m = t.$$

Demnach ist die halbe kleine Axe $= \sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}a^2)}$ (§.248.).

Tab. VII. Fig. 61. Machet BC$=a$, und richtet AB$=\frac{1}{4}b$ darauf perpendicular auf; so ist AC$=\sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + a^2)}$. Richtet ferner auf AC die Linie AD$=\frac{1}{4}b$ perpendicular auf; so ist DC$=\sqrt{(\frac{1}{8}b^2 + a^2)}$, das ist die halbe große Axe.

Tab. VII. Fig. 62. Gleichergestalt richtet auf EF$=\frac{1}{4}b$, EG$=\frac{1}{2}a$ perpendicular auf; so ist GF$=\sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{4}a^2)}$. Richtet ferner GH$=\frac{1}{2}a$ auf GF perpendicular auf; so ist FH$=\sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}a^2)}$, das ist, die halbe kleine Axe.

Tab. VII. Fig. 63. Traget nun auf die Linie AB aus A in E und aus E in B die halbe große Axe: ziehet durch E die Linie HI auf AB perpendicular, und machet EH und EI der halben kleinen Axe gleich; so könnet ihr (§. 257.) die Ellipsin AHBI beschreiben. Machet ferner EL$=a$, und ziehet LD$=$KL$=\frac{1}{4}b$ auf AB perpendicular, hingegen KG und DF mit AB parallel. Endlich traget auf KG aus K in C $\frac{1}{2}a$, und beschreibet aus C durch D einen Circul; so ist abermal DQ$=x$ und QM$=y$. Denn weil PM$=y-\frac{1}{4}b$; so ist PM$^2=y^2-\frac{1}{2}by+\frac{1}{16}b^2$. Wiederum, weil EP$=x-a$, AE$=\sqrt{(\frac{1}{8}b^2+a^2)}=m$, folglich AP$=m+x-a$, und PB$=m-x+a$; so ist AP.PB$=m^2+2ax-x^2-a^2=\frac{1}{8}b^2+2ax-x^2$.

Dero-

Derowegen, da AP.PB : $PM^2 = 2m : t = 2 : 1$ (§. 239.); so ist

$$2y^2 - by + \tfrac{1}{8}b^2 = \tfrac{1}{8}b^2 + 2ax - x^2 \quad \Big| \; 2$$

$$y^2 - \tfrac{1}{2}by = ax - \tfrac{1}{2}x^2$$

In dem Circul wird gefunden $y^2 - by = ax - x^2$. Wenn ihr diese beyden Gleichungen von einander abziehet; so bleibt übrig $-\tfrac{1}{2}by = -\tfrac{1}{2}x^2$. Demnach ist $by = x^2$, folglich $y : x = x : b$. Wenn ihr ferner für x in der Gleichung für den Circul by setzet; so bekommet ihr $y^2 = ax$, folglich $a : y = y : x$. Und solchergestalt sind die Linien DQ und QM richtig gefunden worden.

III. Für die gleichseitige Hyperbel ist (§. 363.).

$$\frac{2r = 0}{q} \qquad \frac{-t = -1}{2m} \qquad \frac{-2n = b}{n = -\tfrac{1}{2}b} \qquad \frac{2p = -a}{p = -\tfrac{1}{2}a}$$

$$r = 0,\ q = \int,\ t = 2m$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = 0$$

$$m^2 = p^2 - n^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2$$

$$m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)}.$$

Tab. VII. Fig. 60.

Weil $\tfrac{1}{4}b^2$ von $\tfrac{1}{4}a^2$ abgezogen werden muß; so müsset ihr hier für b die kleinere und für a die größere Linie annehmen, und solches auch bey dem Circul beobachten, daß nämlich die Linien CK und KD mit einander verwechselt werden. Wenn ihr dieses in Acht nehmet; so könnet ihr die verlangten Linien vermittelst der Hyperbel folgender gestalt finden. Ueber AB$= \tfrac{1}{2}b$ beschreibet einen halben Circul. Darein traget BC$= \tfrac{1}{2}a$; so ist AC $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)}$, oder, wenn a die größere, b die kleinere heissen sollte, $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)}$, das ist, die halbe Axe.

Tab. VII. Fig. 64.

Traget

Tab. VII. Fig. 65. Traget nun auf eine gerade Linie aus G in A und B die halbe Axe, richtet in A die Linie AI =AG perpendicular auf, und beschreibet aus dem Mittelpuncte G durch I einen halben Circul FIf; so sind in F und f die Brennpuncte (§. 265.), und ihr könnet die Hyperbel (§. 271.) beschreiben. Wenn dieses geschehen ist, so machet EG$=\frac{1}{2}b$, richtet in E die Perpendicularlinie EK auf, und machet ED=DK$=\frac{1}{2}a$. Ziehet durch D und K die Linien DQ und KP mit der Axe AL parallel. Traget aus K in C $\frac{1}{2}b$, und beschreibet aus C durch D einen Circul. Endlich ziehet aus M die halbe Ordinate LM; so ist DQ$=x$, QM$=y$.

Denn LM$=y+\frac{1}{2}a$, EA=GE—AG$=\frac{1}{2}b-\sqrt{(\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{4}a^2)}$, oder EA$=\frac{1}{2}b-m$, und daher AL =EA+EL$=x+\frac{1}{2}b-m$, BL$=x+\frac{1}{2}b+m$. Also ist LM$^2=y^2+ay+\frac{1}{4}a^2$, und AL.LB$=x^2+bx+\frac{1}{4}b^2-m^2=x^2+bx+\frac{1}{4}a^2$. Also ist

$$y^2+ay+\tfrac{1}{4}a^2=x^2+bx+\tfrac{1}{4}a^2 \text{ (§. 290.)}.$$

$$y^2+ay=x^2+bx$$

Im Circul $y^2-ay-bx-x^2$ *Subtr.*

demnach $2ay=2x^2$

$ay=x^2$

folglich $y:x=x:a$.

Setzet ferner in der Gleichung für den Circul ay für x^2; so bekommet ihr

$$y^2-ay=bx-ay$$

das ist $y^2=bx$

folglich $b:y=y:x$.

IV. Auf eben diese Art kann man durch die ungleichseitige Hyperbel der Aufgabe ein Genügen thun. Wollet ihr aber

V. Die

V. Die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten gebrauchen; so richtet HD auf DI perpendicular auf, machet DE=a, und EL=b; theilet EL in zween gleiche Theile in N, oder machet DK =$\frac{1}{2}b$, und ziehet KN mit DE parallel. Traget aus K in C $\frac{1}{2}a$, und beschreibet aus C durch D den Circul DELM. Endlich beschreibet auch durch L die Hyperbel TMLS, und aus M, wo sie den Circul durchschneidet, ziehet QM mit DH, oder auch PM mit DQ parallel; so ist DQ=PM=x, DP=QM=y. Denn vermöge der Hyperbel ist (§. 282.). Tab. VII. Fig. 66. 60.

$$DE : DP = PM : EL$$
$$a : y = x : b$$

daher $y - a : a = b - x : x$

und $y - a : b - x = a : x$ (§. 142.).

Vermöge des Circuls ist $y^2 - ay = bx - x^2$, und daher

$$y - a : b - x = x : y$$

daher $a : x = x : y$

Es ist aber auch $a : x = y : b$

Derowegen $x : y = y : b$

Zusatz.

369. Wenn die Seite eines Würfels =a ist, die Seite des doppelten Würfels =y; so ist $2a^3 = y^3$, oder, wenn $2a = b$, $a^2 b = y^3$. Also muß man zwischen der Seite des Würfels und der doppelten Seite zwo mittlere Proportionallinien suchen; so ist die erstere davon die Seite des doppelten Würfels.

Die 137. Aufgabe.

370. **Eine gerade Linie AB, welche nach Belieben in C getheilet worden ist, noch ferner in D dergestalt zu theilen, daß CD:DB=AC:CD** Tab. VIII. Fig. 67.

Auflö-

Auflösung.

Es sey $AC=a$, $CB=b$, $CD=y$; so ist $DB=b-y$, folglich, weil $CD:DB=AC^2:CD^2$,

$$y:b-y=a^2:y^2$$

Setzet $a:y=y:x$

so ist I. $y^2=ax$

und $y:b-y=a:ax$

$=a:x$ (§. 142.)

II. $xy=ab-ay$

Ferner $y^2:by-y^2=a:x$ (§. 142.)

$ax:by-y^2=a:x$

$x:by-y^2=1:x$

III. $x^2=by-y^2$

$ax=y^2$

IV. $x^2+ax=by$

$ax=y^2$

V. $x^2+2ax=y^2+by$

und $x^2=by-y^2$

$ax=y^2$

VI. $ax-x^2=2y^2-by$.

Also bekommt man Gleichungen an folgenden Oertern, nämlich

I. $y^2-ax=0$ an der Parabel.

II. $xy+ay-ab=0$ an der Hyperbel zwischen den Asymptoten.

III. $y^2+x^2-by=0$ an dem Circul.

IV. $x^2+ax-by=0$ an der äussern Parabel.

V. $y^2-x^2+by-2ax=0$ an der gleichseitigen Hyperbel.

VI. $y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}by-\frac{1}{2}ax=0$ an der Ellipsi.

Be-

Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel; so ist DQ$=x$, QM$=y$. Tab. VIII. Fig. 68.

Für den Circul ist (§. 362.)

$$2r=0 \qquad -2n=-b \qquad -2p=0$$

$$\overline{q} \qquad \overline{n=\tfrac{1}{2}b} \qquad \overline{p=0}$$

$$\overline{r=0,\ q=f}$$

$$n^2-m^2+p^2=0$$

$$\overline{n^2=m^2}$$

$$\tfrac{1}{4}b^2=m^2$$

$$\overline{\tfrac{1}{2}b=m.}$$

Wenn ihr demnach mit AC$=\frac{1}{2}b$ einen Circul beschreibet, und CD auf AB perpendicular aufrichtet, DL aber mit AB parallel ziehet; so ist ein jedes DQ$=x$, und ein jedes QM$=y$. Denn PM $=y-\frac{1}{2}b$, AP$=\frac{1}{2}b+x$, PB$=\frac{1}{2}b-x$. Daher PM^2 $=y^2-by+\frac{1}{4}b^2$, und AP.PB$=\frac{1}{4}b^2-x^2$, folglich Tab. VIII. Fig. 69.

$$y^2-by+\tfrac{1}{4}b^2=\tfrac{1}{4}b^2-x^2$$

$$\overline{y^2-by=-x^2}$$

$$\overline{y^2+x^2-by=0.}$$

Damit ihr nun x und y in unserem Falle findet; so setzet den Circul und die Parabel zusammen, dergestalt, daß der Punct D in die Scheitel der Parabel, und DL auf ihre Axe fällt. Nämlich richtet in D auf der Axe DR einen Perpendicul DC$=\frac{1}{2}b$ auf, und beschreibet aus C durch D den Circul; so ist DQ$=x$ und QM$=y$ in unserm Falle. Tab. VIII. Fig. 68.

Denn DQ$=$CS$=y^2:a$, und SM$=y-\frac{1}{2}b$, CM $=\frac{1}{2}b$. Derowegen, weil CM$^2=$CS$^2+$SM^2, und CM$^2=\frac{1}{4}b^2$, CS$^2=y^4:a^2$, SM$^2=y^2-by+\frac{1}{4}b^2$; so ist

$$\tfrac{1}{4}b^2 = y^4 + y^2 - by + \tfrac{1}{4}b^2$$

$$\overline{}$$

$$a^3$$

$$y^4 + y^2 - by = 0$$

$$\overline{}$$

$$a^2$$

——————————— a^2

$$y^4 + a^2y^2 - a^2by = 0$$

——————————— y

$$y^3 + a^2y - a^2b = 0$$

daher $b - y : y = y^2 : a^2$.

Weil die Gleichung der gegenwärtigen Aufgabe gar wenig unterschieden ist von derjenigen, welche wir oben durch alle Kegelschnitte construiret haben (§. 368.); so wollen wir die übrigen Kegelschnitte übergehen.

Die 138. Aufgabe.

Tab. VIII. Fig. 70.

371. **Einen rechtwinklichten Triangel zu beschreiben, von welchem das eine Stück CB von der größten Seite gegeben wird, welches der Perpendicul CD abschneidet, welcher aus dem rechten Winkel D gefället wird, und zwar von der Beschaffenheit, daß die Summe der Quadrate von dem andern Stücke AC und dem Perpendicul CD nebst einem Rectangulo aus dem Perpendicul CD in eine gegebene Linie FG gleich sey dem Rectangulo aus dem Stücke BC in das andere Stück AC und eine gegebene Linie HI.**

Auflösung.

Es sey $BC = a$, $FG = b$, $HI = c$, $AC = x$, $CD = y$; so ist

CB : CD

$$CB : DC = DC : AC$$
$$a : y = y : x$$

$$\text{I. } ax = y^2$$

$$AC^2 + CD^2 + CD.FG = BC.(AC + HI)$$
$$x^2 + y^2 + by = ax + ac$$

$$\text{II. } y^2 + by = ax + ac - x^2$$

daher $ax + by = ax + ac - x^2$

$$\text{III. } by = ac - x^2$$

$$\tfrac{1}{2}by = \tfrac{1}{2}ac - \tfrac{1}{2}x^2$$
$$y^2 + by = ax + ac - x^2$$

$$\text{IV. } y^2 + \tfrac{3}{2}by = ax + \tfrac{3}{2}ac - \tfrac{3}{2}x^2$$
$$y^2 = ax$$
$$by = ac - x^2$$

$$\text{V. } y^2 - by = ax - ac + x^2.$$

Wir haben demnach Gleichungen für folgende Oerter:

I. $y^2 - ax = 0$ an der Parabel.
II. $y^2 + x^2 + by - ax - ac = 0$ an dem Circul.
III. $x^2 + by - ac = 0$ an der äussern Parabel.
IV. $y^2 + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}by - ax - \tfrac{3}{2}ac = 0$ an der Ellipsi.
V. $y^2 - x^2 - by - ax + ac = 0$ an der Hyperbel.

Wenn man in dem Orte an der äussern Parabel $x^2 + by - ac = 0$ für x^2 seinen Werth $y^4 : a^2$ setzet; so bekommt man

$$\frac{y^4}{a^2} + by - ac = 0$$

daher $y^4 + a^2by - a^3c = 0$.

Woraus zu ersehen ist, daß man eine biquadratische Gleichung zu construiren hat.

I. Wenn man mit dem Parameter a eine Parabel beschreibt; so ist der Ort an der Parabel vorhanden.

II. Für den Ort an dem Circul ist

$$2r = 0 \qquad -2n = b \qquad -2p = -a$$

$$q \qquad n = -\tfrac{1}{2}b \qquad p = \tfrac{1}{2}a$$

$$r = 0,\ q = f$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = -ac$$

$$n^2 + p^2 + ac = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}a^2 + ac = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}a^2 + ac)} = m.$$

Tab. VIII. Fig. 71. Machet demnach RI$=\frac{1}{2}b$, und richtet in I perpendicular auf HI$=\frac{1}{2}a$; so ist HR$=\sqrt{(\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb)}$. Verlängert RH in L bis RL$=a$, und in O, bis RO$=c$. Beschreibet über OL einen halben Circul; so ist der Perpendicul CR$=\sqrt{ac}$ (§. 210. *Geom.*), folglich CH$=\sqrt{(\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb+ac)}$ der Radius des Circuls. Wenn ihr also aus C mit CH den Circul beschrieben und durch C die Linie AB mit OL parallel gezogen habt; so machet CK$=\frac{1}{2}a$. Richtet in K den Perpendicul KD$=\frac{1}{2}b$ auf, und ziehet die Linie DQ mit AB parallel; so ist der Ort an dem Circul beschrieben, und der Punct D der Ursprung von x, hingegen y wird bis an die Linie DQ gezogen.

Wenn ihr nun ferner damit den Ort in der Parabel verknüpfen, und dadurch x und y in dem gegebenen Falle determiniren wollet; so nehmet DQ für die Axe an, und beschreibet um selbige mit dem Parameter a die Parabel. Wo sie den Circul durchschneidet, nämlich aus dem Puncte M,

lasset

lasset einen Perpendicul QM auf die Linie DQ fallen; so ist DQ $= x$, QM$= y$. Machet ihr nun QS$= a$, und ziehet die Linien DM und SM; so ist DMS der verlangte Triangel.

Denn DQ$=$KP$= \frac{y^2}{a}$, und daher CP$= \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a$.

Ferner PM$=$PQ$+$QM$= \frac{1}{2}b + y$. Derowegen

$$CP^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2$$

$$PM^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}bb$$

$$CM^2 = \frac{y^2}{a^2} + by + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

$$CH^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + ac$$

$$\frac{y^4}{a^2} + by - ac = 0$$

$$a^2$$

$$y^2 + a^2by - a^3c = 0$$

welches die biquadratische Gleichung ist, welche man hat construiren sollen.

Wie diese Gleichung durch die übrigen Kegelschnitte construiret wird, ist aus der 136. Aufgabe (§. 368.) abzunehmen.

Die 139. Aufgabe.

372. **Eine allgemeine Regel zu finden, alle cubischen und biquadratischen Gleichungen zu construiren.**

Auflösung.

Tab. VIII. Fig. 72. Es sey MAN eine Parabel, und ihre Axe aO, mit welcher AP parallel, darauf DH perpendicular gezogen ist. Aus H als dem Mittelpuncte beschreibet durch A den Circul AMN. Nun sey $AD = b$, $DH = d$, $AQ = c$; so ist $AH^2 = dd + bb$. Es sey ferner $PM = x$, der Parameter der Parabel $= a$; so ist $OM = x + c$ und $KM = x + d$. Da nun (§. 233.)

$$a : OM + AQ = PM : AP (= QO)$$
$$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a}$$

folglich $DP = HK = \frac{x^2 + 2cx}{a} - b$;

so ist $HK^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb$.

Und weil $KM^2 = x^2 + 2dx + dd$; so ist $\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb + x^2 + 2dx + dd = bb + dd$,

das ist

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{4bcx}{a} - \frac{2bx^2}{a} + 2dx + x^2 = 0 \qquad \frac{x}{a^2}$$

$$x^3 + 4cx^2 + 4c^2x - 4abc - 2abx + 2a^2d + a^2x = 0$$

Hieraus ist klar, daß, wenn das andere Glied das Mehrzeichen + hat, die wahren Wurzeln zur Rechten fallen. Vergleichet demnach mit dieser Gleichung folgende $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; so findet ihr

$$4c = p \qquad c = \tfrac{1}{4}p$$

$$4c^2 - 2ab + a^2 = q$$
$$4c^2 + a^2 - q = 2ab$$
$$\tfrac{4}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab$$
$$\frac{p^2}{8a} + \tfrac{1}{2}a - \frac{q}{2a} = b$$

$$4c^2 - 2ab + a^2 = -q$$
$$4c^2 + a^2 + q = 2ab$$
$$\tfrac{4}{16}p^2 + a^2 + q = 2ab$$
$$\frac{p^2}{8a} + \tfrac{1}{2}a + \frac{q}{2a} = b$$

$$2a^2d - 4abc = r$$
$$2a^2d = 4abc + r \qquad 2a^2$$
$$d = \frac{2bc}{a} + \frac{r}{2a}$$

$$2a^2d - 4abc = -r$$
$$2a^2d = 4abc - r \qquad 2a^2$$
$$d = \frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2}$$

das ist

$$d = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2}$$

das ist

$$d = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2}.$$

Setzet nun $PN = x$, und das Uebrige bleibe wie vorhin; so ist $NR = PN - RP = PN - DH = x - d$, $NO = x - c$, $PM = x - 2c$, $NR^2 = x^2 - 2dx + d^2$, und weil (§. 233.).

$$a : ON + AQ = PM : AP$$
$$a : x = x - 2c : \frac{x^2 - 2xc}{a}$$

auch daher $DP = HR = \frac{x^2 - 2cx}{a} - b$, demnach

$$HR^2 = \frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2;$$

folglich, da $HN^2 = HR^2 + NR^2$ (§. 172. *Geom.*),

$$\frac{x^4}{a^2}-\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}-\frac{2bx^2}{a}+\frac{4bcx}{a}+b^2+x^2-2dx+dd$$
$$=bb+dd$$

$$\frac{x^4}{a^2}-\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}+\frac{4bcx}{a}-\frac{2bx^2}{a}-2dx+x=0 \qquad \frac{x}{a^2}$$

$$x^3-4cx^2+4c^2x+4abc-2abx-2a^2d+a^2x=0.$$

Hieraus erhellet, daß, wenn das andere Glied das Minderzeichen — hat, die wahren Wurzeln zur Linken fallen. Man vergleiche demnach mit der gefundenen Gleichung folgende, $x^3-px^2+qx+r-o$; so ist

$-p=-4c$, $4c^2-2ab+a^2=q$, $4c^2-2ab+a^2=-q$

$\frac{1}{4}p=c$ $\quad \frac{4}{16}p^2+a^2-q=2ab$ $\quad \frac{4}{16}p^2+a^2+q=2ab$

$\frac{p^2}{8a}+\frac{1}{2}a-\frac{q}{2a}=b$ $\quad \frac{p^2}{8a}+\frac{1}{2}a+\frac{q}{2a}=b$

$4abc-2a^2d=r$	$4abc-2a^2d=-r$
$4abc-r=2a^2d$	$4abc+r=2a^2d$ $\quad 2a^2$
$\frac{2bc}{a}-\frac{r}{2a^2}=d$	$\frac{2bc}{a}+\frac{r}{2a^2}=d$
$\frac{1}{4}p+\frac{p^3}{16a^2}+\frac{pq}{4a^2}-\frac{r}{2a^2}=d$,	$\frac{1}{4}p+\frac{p^3}{16a^2}+\frac{pq}{4a^2}+\frac{r}{2a^2}=d$.

Also ist in allen vollständigen cubischen Gleichungen

$$AQ = \tfrac{1}{4}p$$
$$DA = \tfrac{1}{2}a \pm \frac{p^2}{8a} \pm \frac{q}{2a}$$
$$DH = \tfrac{1}{4}p \pm \frac{p^3}{16a^2} \pm \frac{pq}{4a^2} \pm \frac{r}{2a^2}.$$

Nämlich q hat allezeit in der Regel —, wenn es in der Gleichung $\pm$ hat, und hingegen $\pm$, wenn hier — ist. Hingegen ist beständig $\pm r$, ausser, wenn in der Gleichung p und r verschiedene Zeichen haben.

Wenn einige Glieder in der Gleichung fehlen; so müssen auch aus der Gleichung alle weggelassen werden, in welchen die dazu gehörigen Buchstaben zu finden sind. Z. E. Wenn das andere Glied fehlet; so ist $\frac{1}{4}p = 0$, und daher $DA = \frac{1}{2}a \pm \frac{q}{2a}$, und $DH = \frac{r}{2a^2}$.

Wenn ihr das Quadrat von dem Radio des Circuls HM oder HN setzet $bb \pm dd \pm af$; so läßt sich die Gleichung auf keine cubische bringen, sondern sie bleibt biquadratisch. Wenn ihr nun damit die Gleichung $x^4 \pm px^3 \pm qx^2 \pm rx \pm s = 0$ vergleichet; so bleibt alles, wie vorhin: nur wird gefunden

$$s = a^3 f, \text{ und daher } s : a^3 = f.$$

Solchergestalt werden die biquadratischen Gleichungen durch eben diese Regel construiret; nur daß der Radius des Circuls $(= \sqrt{(bb \pm dd \pm af)})$ anderst gefunden wird, wie bereits in einem Exem-

pel in der vorhergehenden Aufgabe (§. 371.) gezeigt worden ist.

Anmerkung.

373. Diese Regel nennet man insgemein die Backerische Centralregel, weil sie Thomas Backer, ein Engelländer, gefunden hat. Ich halte es für dienlich, ihren Gebrauch durch folgende Aufgabe zu erläutern.

Die 140. Aufgabe.

Tab. VIII. Fig. 73. 374. In einem rechtwinklichten Triangel ABC wird gegeben das Stück von der Hypothenuse BD und das von der Grundlinie EC nebst dem Perpendicul AB: man soll die Seiten BC und AC finden.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $BD = b$, $EC = c$, so ist $DC = x$, $AE = y$, $BC = b + x$, $AC = c + y$.

$$CD : DB = CE : EA$$
$$x : b = c : y$$
$$xy = bc$$
$$y = bc : x$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$b^2 + 2bx + x^2 = a^2 + c^2 + 2cy + y^2$$
$$= a^2 + c^2 + \frac{2bc^2}{x} + \frac{b^2c^2}{x^2}$$

$$x^2$$

$b^2x^2 + 2bx^3 + x^4 = a^2x^2 + c^2x^2 + 2bc^2x + b^2c^2$ das ist,

$x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 - a^2x^2 - c^2x^2 = 0.$

Neh-

Nehmet a für den Parameter an, und beschreibet eine Parabel. Weil $p=2b$, $q=b^2-a^2-c^2$, $r=-2bc^2$, $s=-b^2c^2$; so ist in der Backerischen Centralregel

$$AQ=\tfrac{1}{2}b,\ DA=\tfrac{1}{2}a+\frac{4b^2}{8a}-\frac{b^2}{2a}+\tfrac{1}{2}a+\frac{c^2}{2a}=a+\frac{c^2}{2a}$$ Tab. VIII. Fig. 72.

$$DH=\tfrac{1}{2}b+\frac{8b^3}{16a^2}-\frac{2b^3}{4a^2}+\frac{2a^2b}{4a^2}+\frac{2bc^2}{4a^2}-\frac{2bc^2}{2a^2}=b-\frac{bc^2}{2a^2}.$$

Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel, machet $aQ=\tfrac{1}{2}b$, und in der Linie QP, welche mit der Axe parallel gezogen ist, $AD=a+\frac{c^2}{2a}$ die Perpendicularlinie $DH=b-\frac{bc^2}{2a^2}$. Wie die Linien $c^2:2a$ und $bc^2:2a^2$ gefunden werden, ist aus den oben gefundenen Werthen von dergleichen Linien klar: nämlich $c^2:2a$ ist die halbe dritte Proportionallinie zu a und c, hingegen $bc^2:2a^2$ ist die vierte zu a, b und $c^2:2a$. Durch H und A ziehet die Linie CB, und machet $AB=a$, $AC=b^2c^2:a^3$, welches die vierte Proportionallinie zu a, b und $bc^2:a^2$ ist. Ueber CB beschreibet einen halben Circul, und richtet aus A den Perpendicul AE auf. Endlich beschreibet aus H mit HE einen Circul, welcher die Parabel in M durchschneidet; so ist $PM=x$. Tab. VIII. Fig. 74.

Denn $$AD^2=a^2+c^2+\frac{c^4}{4a^2}$$

$$DH^2=b^2-\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{b^2c^4}{4a^4}$$

$$AH^2=a^2+b^2+c^2+\frac{c^4}{4a^2}-\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{b^2c^4}{4a^4}$$

$$EH^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

Ferner ist (§. 233.)

$$a : OM + aQ = PM : PA$$

$$a : x + b = x : \frac{x^2 + bx}{a}$$

daher $DP = HR = \frac{x^2 + bx}{a} - a - \frac{c^2}{2a}$

und weil $RM = x + b - \frac{bc^2}{2a^2}$, so ist

$$RM^2 = x^2 + 2bx + bb - \frac{bc^2x}{a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

$$HR^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{2bx^3}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - 2x^2 - 2bx + \frac{a^3 - c^2x}{a} - \frac{bc^2x}{a^2} + c^2 + \frac{c^4}{4a^2}.$$

Wenn man nun von der Summe dieser beyden Quadrate das Quadrat von EH abziehet; so bleibt

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{2bx^3}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{2bc^2x}{a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} - x^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} = 0$$

übrig, und demnach ist

$$x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 - a^2x^2 - c^2x^2 = 0.$$

Ende des ersten Theils.

Der

Der andere Theil, von den Anfangsgründen der Differentialrechnung.

Die 1. Erklärung.

1.

Die Differentialrechnung ist eine Wissenschaft, aus einer gegebenen endlichen Größe eine unendlich kleine zu finden, deren unendliche zusammen genommen, ihr gleich werden.

Anmerkung.

2. Der Herr Geheime Rath von Leibnitz hat diese Rechnung gefunden. Es ist aber der tiefsinnige Geometra, *Isaac Newton*, in Engelland auf eben dergleichen Gedanken gekommen, wiewohl er eine andere Manier hat, die unendlich kleinen Größen zu bezeichnen, und auch die Rechnung selbst mit einem andern Namen nennet, nämlich Methodum Fluxionum.

Die 2. Erklärung.

3. Eine unendlich kleine Größe ist diejenige, welche so ein geringer Theil von der andern ist, daß er mit ihr nicht verglichen werden kann.

Der 1. Zusatz.

4. Dannenhero ist sie, in Ansehung derjenigen Größe, mit welcher sie nicht verglichen werden kann, für nichts zu halten.

Der 2. Zusatz.

5. Folglich, wenn eine unendlich kleine Größe zu einer andern addirt, oder von ihr subtrahirt wird; so ist in dem ersten Falle die Summe, in dem andern die Differenz der gegebenen gleich zu achten, das ist, eine unendlich kleine Größe kann eine endliche weder vermehren noch vermindern.

Die 1. Anmerkung.

6. Merket aber wohl, daß eine unendlich kleine Größe nur in Ansehung einer andern für nichts zu achten; an sich aber wohl etwas ist. Denn bildet euch ein, ihr wollet die Höhe eines Berges messen, und indem ihr über der Arbeit begriffen wäret, jagte der Wind ein Körnlein Sand von der Spitze weg. So wäre der Berg um den Diameter eines Sandkörnleins niedriger geworden. Allein, da die Ausmessung der Höhe eines Berges so beschaffen ist, daß die Höhe einerley gefunden wird, ob das Sandkörnlein liegen bleibt, oder von dem Winde weggejagt wird; so kann man dasselbe, in Ansehung eines großen Berges, für nichts, und also seine Größe, in Ansehung der Höhe des Berges, für unendlich klein halten. Dieses hat man schon längst überall in Acht genommen, wo man die Geometrie bey körperlichen Dingen in der Natur anbringt. Also setzen wir in der Astronomie, der Diameter der Erde sey, in Ansehung der Weite von der Sonne, und noch mehr der Fixsterne, für einen Punct, oder unendlich klein zu halten, weil die erste Bewegung der Sterne sich eben so verhalten würde, wenn die Erde würklich ein untheilbarer Punct wäre. So halten wir in den Mondsfinsternissen die Erde für eine vollkommene Kugel, und also die Höhen der Berge, in Ansehung des Diameters der Erde, für unendlich klein, oder für nichts; weil der Schatten der Erde sich auf dem Monde nicht anderst darstellen würde, wenn die Berge gleich nicht da wären, und die Erde die völlige Gestalt einer Kugel hätte. Da man nun auch in der Geometrie großen Vortheil davon hat, wenn man die Größen in unendlich kleine Theile in Gedanken theilet, das ist, in so kleine, welche, in Ansehung ihrer, für nichts zu halten sind, indem man daraus die endlichen Größen öfters determiniren, und ihre verborgenen Eigenschaften auf die aller-

ste Manier finden kann: wer will es den Geometris verdenken, daß sie dergleichen vornehmen?

Die 2. Anmerkung.

7. Ihr wisset aus der gemeinen Geometrie, daß eine Linie beschrieben wird, wenn ein Punct sich durch einen gewissen Raum bewegt; eine Fläche, wenn eine Linie; ein Körper, wenn eine Fläche sich bewegt. Also erwachsen die Größen, indem unendlich viele kleine Theile nach einander anwachsen. Und in dieser Absicht nennet sie *Newton* Fluxionen oder Fluxiones.

Die 3. Erklärung.

8. **Wenn die unendlich kleinen Größen als der Unterscheid zwoer endlichen angesehen werden, so nennet man sie Differentialgrößen.**

Die 4. Erklärung.

9. **Differentiiren heißt: die Differentialgröße von einer gegebenen endlichen finden.**

Die 5. Erklärung.

10. **Die Größen, welche immer wachsen, oder abnehmen, indem andere unverändert bleiben, heißen veränderliche; die andern aber unveränderliche Größen.** Also sind in einer Parabel die Abscissen und Semiordinaten veränderliche Größen, der Parameter aber ist eine unveränderliche. Denn indem jene beyden beständig wachsen, bleibt dieser unverändert (§. 217. *P. I.*).

Zusatz.

11. Da nun die Differentialgrößen die unendlich kleinen Theile sind, welche nach und nach anwachsen, indem sie erzeuget werden (§. 7. 8.); so haben die unveränderlichen Größen keine Differentialgröße.

Der

Der 1. willkührliche Satz.

12. Nennet die veränderlichen Größen mit den letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z; die unveränderlichen aber mit den ersten, a, b, c.

Der 2. willkührliche Satz.

13. Die Differentialgröße von x nennet dx, die von y nennet dy, und so weiter.

Der 1. Zusatz.

14. Also ist da, oder db, oder $dc = 0$ (§. 11.).

Der 2. Zusatz.

15. Und die Differentialgröße von $x + y - a$ ist $dx + dy$; die von $x - y + a$ aber $dx - dy$. Demnach ist es leicht, die Größen, welche zu einander addiret, oder von einander subtrahiret sind, zu differentiiren.

Die 1. Aufgabe.

16. Zwo Größen, welche einander multipliciren, als xy, zu differentiiren.

Auflösung.

1. Multipliciret die Differentialgröße der einen veränderlichen Größe in die andere veränderliche Größe.
2. Die beyden Producte addiret zusammen, so kommt die Differentialgröße xy heraus, $xdy + ydx$.

Beweis.

Lasset x und y um ihre halbe Differentialgröße vermehret und vermindert werden, so kommt in dem erstern Falle $x - \frac{1}{2}dx$ und $y - \frac{1}{2}dy$, in dem andern Falle $y + \frac{1}{2}dy$ und $x + \frac{1}{2}dx$. Multipliciret

beyde durch einander in beyden Fällen, so bekommet ihr $xy - \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$ und $xy + \frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$. Wenn ihr beyde Producte von einander abziehet, so bleibt für die Differentialgröße des Rectanguli xy übrig $xdy + ydx$. W. Z. E.

Der 1. Zusatz.

17. Wenn viele Größen einander multipliciren, so dürfet ihr nur zwo oder mehrere nach einander als eine ansehen, und ihr könnet sie nach der gegebenen Regel differentiiren. Z. E. Es sey xyv zu differentiiren, so ist die Differentialgröße $xydv + xvdy + yvdx$. Denn es sey $xy = t$, so ist $xyv = tv$, folglich $d(xyv) = tdv + vdt$. Nun ist $dt = xdy + ydx$. Derowegen, wenn ihr für t und dt die gehörigen Werthe setzet, so findet ihr $tdv + vdt = xydv + vxdy + vydx$.

Der 2. Zusatz.

18. Dannenhero findet ihr ferner die Differentialgröße einer Potenz, wenn ihr ihren Exponenten um 1 vermindert, und alsdenn die erniedrigte Potenz in ihren unveränderlichen Exponenten und die Differentialgröße der Wurzel multipliciret. Nämlich $d(x^2) = 2xdx$, $d(x^3) = 3x^2dx$, und überhaupt $d(x^m) = mx^{m-1}dx$.

Der 3. Zusatz.

19. Die Differentialgröße von ay ist $ady + yda$. Nun ist $da = 0$ (§. 14.). Derowegen ist $d(ay) = ady$.

Der 4. Zusatz.

20. Weil $\sqrt{x} = x^{1:2}$ und überhaupt $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 42. *Part. I.*), so ist die Differentialgröße von einer

Irra-

Irrationalgröße $(n:m)x^{n:m-1}dx=(n:m)x^{(n-m):m}dx$
$=(n:m)\sqrt[m]{x^{n-m}}dx$.

Der 5. Zusatz.

21. Wiederum, weil $1:x=x^{-1}$, $1:x^2=x^{-2}$, und überhaupt $1:x^m=x^{-m}$; so ist die Differentialgröße von $1:x$, und $1:x^2$, imgleichen $1:x^m$ $=-x^{-2}dx$, $-2x^{-3}dx$, und $-mx^{-m-1}xd$.

Anmerkung.

22. Daß $1:x=x^{-1}$, $1:x^2=x^{-2}$, $1:x^3=x^{-3}$, u. s. w. könnet ihr bald begreifen, wenn ihr nur bedenket, es gehen die Exponenten in einer arithmetischen Verhältniß fort, indem die Dignitäten in einer geometrischen fortschreiten. Nun seyn die Dignitäten x^2, x, 1, $1:x^2$, $1:x^3$, so sind die Exponenten 2. 1. 0. —1. —2. —3. Und daher ist eben $x^0=1$.

Der 6. Zusatz.

23. Endlich, weil $1:\sqrt{x}=1:x^{1:2}=x^{-1:2}$, $1:\sqrt{x^3}=1:x^{3:2}=x^{-3:2}$, und überhaupt $1:\sqrt[m]{x^n}$ $=1:x^{n:m}=x^{-n:m}$; so sind die Differentialgrößen von dergleichen Größen $-\frac{1}{2}x^{-3:2}dx$, $-\frac{3}{2}x^{-5:2}dx$, und überhaupt $-(n:m)x^{-n:m-2}dx=-(n:m)$ $x^{(-n-m):m}dx=-ndx$

$$\overline{m\sqrt[m]{x^{n+m}}}.$$

Die 2. Aufgabe.

24. Zwo Größen, welche einander dividiren, $x:y$ zu differentiiren.

Auflö-

Auflösung.

Es sey $x:y=v$

so ist $x=vy$

$dx=vdy-ydv$

$dx=vdy+ydv$ (§. 16.).

das ist, $dx:y-xdy:y=dv$

oder $(ydx-xdy):y^2=dv$.

Regel.

(1) Multipliciret die Differentialgröße des Zählers in den Nenner, und (2) des Nenners in den Zähler. (3) Ziehet das letztere Product von dem erstern ab. (4) Das Uebrige dividiret durch das Quadrat des Nenners.

Zusatz.

25. Wenn in dem Zähler und Nenner viele veränderliche Größen enthalten sind, so könnet ihr sie gleichfalls nach den gegebenen Regeln differentiiren, wenn ihr zwo als eine ansetzet. Denn es sey $xy:vz$ zu differentiiren. Setzet $xy=t$ und $vz=s$; so ist $d(xy:vz)=(sdt-tds):s^2$. Nun ist $dt=xdy+ydx$, und $ds=vdz+zdv$ (§. 16.). Derowegen ist $sdt-tds$ $=vzxdy+vzydx-vxydz-xyzdv$, folglich $d(xy:vz)$ $=(vzxdy+vzydx-xyzdv-xyvdz):v^2z^2$.

Die 1. Anmerkung.

26. Wie wir die Regel in der Division gefunden haben, so hättet ihr auch alle Regeln finden können, welche in dem 4, 5 und 6 Zusatze der vorhergehenden Aufgabe auf eine andere Art hergeleitet worden sind: Denn setzet

$\sqrt[m]{x^n}=v$

so ist $x^n=v^m$

$nx^{n-1}dx=mv^{m-1}dv$ (§. 18.).

$nx^{n-1}dx:mv^{m-1}=dv$.

Nun ist $v^{m-1} = v^m : v = x^n : \sqrt[m]{x^n}$, folglich $nx^{n-1}dx : mv^{m-1} = nx^{n-1}dx\sqrt[m]{x^n} : mx^n = (n:m)x^{-1}dx \sqrt[m]{x^n} = (n:m)x^{-1}x^{n:m}dx = (n:m)x^{n:m-1}dx$, wie ihr es (§. 20.) gefunden habt.

Die 2. Anmerkung.

27. Damit ihr den Nutzen der Differentialrechnung in der höhern Geometrie sehet, so muß ich zeigen, wie die Eigenschaften der krummen Linien dadurch erfunden werden.

Von den Tangentibus der krummen Linien, oder den geraden Linien, welche sie berühren.

Die 6. Erklärung.

Tab. IX. Fig. 75. 28. Weil der Punct, welcher die krumme Linie beschreibt, in seiner Bewegung seine Direction beständig ändert (§. 2. 8. *Geom.*); so kann man sich die krummen Linien vorstellen, als wenn sie aus unendlich kleinen geraden Linien zusammen gesetzt, und daher ein Polygon von unzählich unendlich kleinen Seiten wären. Wenn ihr nun setzet, daß eine von diesen Seiten Mm in eine endliche gerade TM verlängert wird; so ist selbige der Tangens der krummen Linie.

Zusatz.

29. Derowegen zeigt der Tangens die Direction, welche der Punct, der die krumme Linie beschrieben, an jedem Theile derselben gehabt hat.

Die 7. Erklärung.

Tab. IX. Fig. 76. 30. Der SUBTANGENS ist die Linie PT, welche zwischen dem Tangente TM und der Semiordinate PM enthalten ist.

Die

Die 8. Erklärung.

31. Wenn ihr in dem Puncte der Berüh- Tab. IX.
rung M eine Perpendicularlinie MH aufrichtet Fig. 75.
bis sie die Axe in H erreicht, so heißt sie die Normallinie; der Theil der Axe aber PH, welcher zwischen ihr und der Semiordinate PM lieget, die Subnormallinie.

Die 3. Aufgabe.

32. In einer jeden gegebenen algebraischen Tab. IX.
Linie den zu einem gegebenen Puncte gehörigen Fig. 75.
Subtangentem zu finden.

Auflösung.

Setzet die Semiordinate pm der andern PM unendlich nahe, und ziehet MR mit der Axe AH parallel, so ist MR=Pp (§. 22. *Geom.*) die Differential der Abscisse AP, mR die Differential der Semiordinate PM (§. 8.). Weil nun PM mit *pm* parallel ist, so ist der Winkel MmR dem Winkel TMP gleich (§. 97. *Geom.*): folglich, da bey R und P rechte Winkel sind, mR : MR=PM : PT, (§. 183. *Geom.*). Setzet nun PM=y, PA=x; so ist MR=dx, mR=dy (§. 13.), folglich $dy : dx = y :$ PT, und demnach PT=$ydx : dy$. Wenn ihr nun den Werth von dx aus der Æquation substituiret, welche die Natur einer krummen Linie insbesondere erkläret; so verschwindet dx und dy, und kommt der Subtangens TP in lauter endlichen Größen heraus.

Der 1. Zusatz.

33. Es sey für die Apollonische Parabel $ax=y^2$, so ist $adx=2ydy$, $dx=2ydy : a$, folglich PT=$ydx : dy = 2y^2dy : ady = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$. Derowegen ist

in der Parabel der Subtangens TP zu der Abscisse AP wie 2 zu 1.

Der 2. Zusatz.

34. Es sey für unendliche Parabeln $a^{m-1}x = y^m$, so ist

$$a^{m-1}dx = my^{m-1}dy \ (\S.\ 18.)$$

$$dx = my^{m-1}dy : a^{m-1}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : a^{m-1}dy = my^m : a^{m-1}$$
$$= ma^{m-1}x : a^{m-1} = mx.$$

Wenn also $m = 3$; so ist $PT = 3x$, das ist, in der Parabel von dem andern Geschlechte ist $PT : AP = 3 : 1$ &c.

Der 3. Zusatz.

35. Es sey $a^n x^r = y^m$, so ist

$$ra^n x^{r-1}dx = my^{m-1}dy \ (\S.\ 18.).$$

$$dx = my^{m-1}dy : ra^n x^{r-1}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : ra^n x^{r-1}dy = my^m$$
$$: ra^n x^{r-1} = ma^n x^r : ra^n x^{r-1} = mx : r.$$

Setzet z. E. $a^3x^2 = y^5$; so ist $PT = \frac{5}{2}x$, das ist, $PT : AP = 5 : 2$.

Der 4. Zusatz.

36. In dem Circul ist $ax - xx = yy$, und demnach

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a - 2x)$$

$$PT = \frac{ydx}{dy} = 2y^2dy : (a-2x)dy = \frac{2y^2}{a-2x} = \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x}$$

Solchergestalt ist $\frac{1}{2}a - x : a - x = x : PT$.

Weil

Weil PT$=(ax-xx):(\frac{1}{2}a-x)$; so ist AT$=(ax-xx):(\frac{1}{2}a-x)-x=(ax-xx-\frac{1}{2}ax+xx):(\frac{1}{2}a-x)=\frac{1}{2}ax:(\frac{1}{2}a-x)$, folglich $a-2x:a=x:$AT. Tab. IX. Fig. 75.

Der 5. Zusatz.

37. Es sey für unendliche Circul (§. 259. *P. I.*).

$$ax^m-x^{m+1}=y^{m+1}$$

so ist $max^{m-1}dx-(m+1)x^m dx=(m+1)y^m dy$

$$dx=(m+1)y^m dy:(max^{m-1}-(m+1)x^m)$$

PT$=ydx:dy=(m+1)y^{m+1}:(max^{m-1}-(m+1)xm)=(m+1)(ax^m-x^{m+1}):(max^{m-1}-(m+1)x^m)=(m+1)(ax-x^2):(ma-mx-x)$. Demnach ist AT $=(m+1)(ax-x^2):(ma-(m+1)x)-x=(max+ax-mx^2-x^2-max+mx^2+x^2):(ma-(m+1)x)=ax:(ma-(m+1)x)$.

Es sey ein Circul von dem andern Geschlechte, so ist $m=2$, also AT$=ax:(2a-3x)$, und PT $=(3ax-3x):(2a-3x)$.

Der 6. Zusatz.

38. In der Apollonischen Ellipsi ist $ay^2=abx-bx^2$ (§. 239. *P. I.*) und daher

$$2aydy=abdx-2bxdx$$

$$dx=2aydy:(ab-2bx)$$

PT$=ydx:dy=2ay^2dy:(ab-2bx)dy=2ay^2:(ab-2bx)=(2abx-2bx^2):(ab-2bx)=(2ax-2x^2):(a-2x)$. Daher ist AT$=(2ax-2x^2):(a-2x)-x=(2ax-2x^2-ax+2x^2):(a-2x)=ax:(a-2x)$ wie im Circul (§. 36.).

Der 7. Zusatz.

39. Für unendliche Ellipses ist (§. 258. *P. I.*).

$ay^{m+n} = bx^m(a-x)^n$ und daher

$(m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx$

$(m+n)ay^{m+n-1}dy : (mbx^{m-1})(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1} = dx$

$PT = ydx : dy = (m+n)ay^{m+n} : (mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}) = (mbx^m(a-x)^n + nbx^m(a-x)^n) : mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}) =$ (wenn ihr mit bx^{m-1} und $(a-x)^{n-1}$ dividiret) $(m+n)(ax - xx) : (ma - mx - nx)$.

Derowegen ist $AT = (m+n)(ax - xx) : (ma - mx - nx) - x = (max - mx^2 + nax - nx^2 - max + mx^2 + nx^2) : (ma - mx - nx) = nax : (ma - mx - nx)$.

Es sey z. E. eine Ellipsis von dem andern Geschlechte, so ist $m = 2$, $n = 1$ (§. 258. *P. I.*), $PT = (3ax - 3xx) : (2a - 3x)$, $AT = ax : (2a - 3x)$.

Der 8. Zusatz.

40. Für eine Apollonische Hyperbel ist $ay^2 = abx + bxx$ (§. 260. *P. I.*) und daher findet ihr wie (§. 38.) $PT = (2ax + 2xx) : (a + 2x)$, und $AT = ax : (a + 2x)$.

Der 9. Zusatz.

41. Für unendliche Hyperbeln ist $ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n$ (§. 286. *P. I.*). Derowegen findet ihr, wie (§. 39.) $PT = (m+n)(ax + xx) : (ma + mx + nx)$ und $AT = nax : (ma + mx + nx)$.

Der 10. Zusatz.

42. Für eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist $xy = aa$ (§. 284. *P. I.*).

Daher $xdy + ydx = 0$ (§. 14. 16.).

$ydx = -xdy$

$PT = ydx : dy = -xdy : dy = -x$.

Also

Also ist der Subtangens PT der Absciſſe AP gleich, muß aber, weil $-x$ ist, ihrem Urſprunge entgegen geſetzt werden, das iſt, wenn der Punct, wovon die Abſciſſen gerechnet werden, zur Linken der Semiordinate iſt, ſo wird der Subtangens auf der Aſymptote zu ihrer Rechten genommen. Tab. IX. Fig. 77.

Der 11. Zuſatz.

43. Für unendliche Hyperbeln zwiſchen ihren Aſymptoten iſt $a^{m+n} = y^m x^n$ (§. 285. *P. I.*).

Daher $0 = mx^n y^{m-1} dy + nx^{n-1} y^m dx$

$$mx^n y^{m-1} dy : nx^{n-1} y^m = dx$$

$$PT = ydx : dy = -mx^n y^m : nx^{n-1} y^m = -\frac{mx}{n}.$$

Es ſey eine Hyperbel von dem andern Geſchlechte, ſo iſt $m = 2$, $n = 1$, $PT = -2x$.

Der 12. Zuſatz.

44. Endlich, weil für alle algebraiſche Linien (§. 214. *P. I.*).

$ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = 0$, ſo iſt

$$may^{m-1}dy + nbx^{n-1}dx + rcy^{r-1}x^s dy + fcy^r x^{s-1} dx = 0$$

$$nbx^{n-1}dx + fcy^r x^{s-1} dx = -may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy$$

$$dx = (-may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy) : (nbx^{n-1} + fcy^r x^{s-1}$$

$PT = ydx : dy = (-may^m - rcy^r x^s) : (nbx^{n-1} + fcy^r x^{s-1}$, nach welcher Regel aller algebraiſchen Linien Subtangentes gefunden werden, wenn ihr für die undeterminirten Buchſtaben a, c, b und die Exponenten m, n, r, s ihren Werth aus ihrer Gleichung ſetzet. Z. E. Weil für die Parabel von dem erſten Geſchlechte

$ax = y^2$, oder $y^2 - ax = 0$, so ist

$$\frac{ay^m = y^2}{a = 1, m = 2,} \quad \frac{bx^n = -ax}{b = -a, n = 1,} \quad \frac{cy^r x^s = 0}{c = 0, r = 0} \quad \frac{s = 0}{s = 0}$$

daher $PT = (-2 . 1y^2 - 0.0y^0x^0) : (-1.ax^{1-1} + 0 .0y^0x^{0-1}) = -2y^2 : -a = 2ax : a = 2x.$

Wiederum: es sey $y^3 - x^3 - axy = 0$; so ist

$$\frac{ay^m = y^3,}{a = 1, m = 3,} \quad \frac{bx^n = -x^3,}{b = -1, n = 3,} \quad \frac{cy^r x^s = -axy}{c = -a, r = 1,} \quad \frac{s = 0}{s = 1}$$

daher $PT = (-3 . 1y^3 - 1 . -ayx) : (3 . -1x^{3-1} + 1 . -ayx^{1-1}) = (-3y^3 + axy) : (-3x^2 - ay) = (3y^3 - ayx) : (-3x^2 + ay)$; folglich $AT = (3y^3 - ayx) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^3 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2axy) : (3x^2 + ay) = axy : (3x^2 + ay)$. Denn da $y^3 x^3 = axy$; so ist $4y^3 - 3x^3 = 3ayx$.

Der 13. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 75. 45. Weil $PT = ydx : dy$, $PM = y$; so ist $TM = \surd(y^2dx^2 : dy^2 + y^2) = \surd((y^2dx^2 + y^2dy^2) : dy^2) = y \surd(dx^2 + dy^2) : dy$.

Die 4. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 75. 46. Die Subnormallinie PH in einer algebraischen Linie zu finden.

Auflösung.

Weil der Triangel TMH bey M rechtwinkelicht ist, so ist

TP : PM = PM : PH (§. 210. *Geom.*)

das ist: $\frac{ydx}{dy} : y = y : PH.$

Dero-

Derowegen PH$=y^2dy:ydx=ydy:dx$. Wenn ihr demnach aus der Gleichung für eine besondere Linie den Werth von dy durch x exprimiret; so bekommet ihr die Subnormallinie, wie vorhin den Subtangentem, in lauter endlichen Größen.

Der 1. Zusatz.

47. Es sey $ax=y^2$,

so ist $adx=2ydy$

$$\tfrac{1}{2}adx=ydy$$

$$PH=ydy:dx=adx:2dx=\tfrac{1}{2}a.$$

Demnach ist in der Parabel die Subnormallinie beständig dem halben Parameter gleich, folglich die Normallinie $MH=\sqrt{(yy+\tfrac{1}{4}aa)}=\sqrt{(ax+\tfrac{1}{4}aa)}$.

Der 2. Zusatz.

48. Es sey $ax-xx=y^2$

$$adx-2xdx=2ydy$$

$$\tfrac{1}{2}adx-xdx=ydy$$

$$PH=ydy:dx=\tfrac{1}{2}a-x.$$

Daher ist klar, daß alle Normallinien in dem Circul durch den Mittelpunct gehen, oder, daß alle Radii des Circuls auf der Peripherie perpendicular stehen, und demnach der Tangens des Circuls mit dem Radio einen rechten Winkel macht.

Der 3. Zusatz.

49. Weil $PH=ydy:dx$, und $PM=y$; so ist $HM=\sqrt{(y^2+y^2dy^2:dx^2)}=\sqrt{(y^2dx^2+y^2dy^2:dx^2)}$ $=y\sqrt{(dx^2+dy^2)}:dx$.

Die 5. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 75. 50. **Die Asymptoten einer algebraischen Linie zu determiniren.**

Auflösung.

1. Wenn die Abscisse AP unendlich groß wird, so ist der Tangens TM die Asymptote, als welche die krumme Linie nicht eher als in einer unendlichen Weite, das ist, niemals berühren kann (§. 278. *P. I.*). Daher werden die unveränderlichen Größen, in Ansehung der Abscisse x, unendlich kleine. Wenn ihr demnach in dem Werthe von AT diejenigen Größen weglasset, die nicht mit x multipliciret sind; so findet ihr die Weite des Puncts C, aus welcher die Asymptote CD gezogen wird, von dem Scheitelpuncte A.

Z. E. In der Apollonischen Hyperbel ist $AT = ax:(a+2x)$, und demnach a, in Ansehung x, unendlich kleine, folglich $ax:2x = \frac{1}{2}a = AC$, wie schon oben (§. 272. 278. *P. I.*) auf andere Art ist erwiesen worden.

2. Lasset nun ferner auch in der Gleichung für die krumme Linie die unveränderlichen Größen, welche durch keine andere multipliciret sind, weg; so könnet ihr dadurch den Werth von AE finden, und folglich die Asymptote ziehen.

Z. E. In der Apollonischen Hyperbel ist $ay^2 = bx.(a+x)$. Da nun a, in Ansehung x, unendlich klein ist, so habet ihr

$$ay^2 = bx^2$$

folglich $$y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$$

$$dy\sqrt{a} = dx\sqrt{b}$$

$$dx : dy = \sqrt{a} : \sqrt{b}.$$

Nun

Nun ist $dx:dy = AC:AE$ (§. 183. *Geom.*)
das ist $\sqrt{a}:\sqrt{b} = \frac{1}{2}a:AE$.

Demnach ist $AE = \frac{1}{2}a\sqrt{b}:\sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}aab}:\sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$, wie abermal oben (§. 272. 278. *P. I.*) schon auf andere Art erwiesen worden ist.

Anderst.

Weil $TP:PM = TA:AG$; so ist in dem Asymptotischen Falle, da TP zu CP, TA zu CA und AG zu AE wird, $CP:PM = CA:AE$. Nun ist $TP = 2x(a+x):(a+2x)$, und also $CP = 2x^2:2x = x$, weil in dem Asymptotischen Falle $a = 0$. Daher ist $x:\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}a:AE$, folglich $AE = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$.

Zusatz.

51. In unendlichen Hyperbeln ist (§. 41.) überhaupt $AT = nax:(ma+mx+nx)$. Daher $AC = nax:(mx+nx) = na:(m+n)$. Und weil ferner (§. 286. *P. I*).

$$ay^{m+n} = bx^m(a+x)^n$$

so ist $ay^{m+n} = bx^{m+n}$

oder wenn ihr $m+n = r$ setzet

$$ay^r = bx^r$$

$$ya^{1:r} = xb^{1:r}$$

$$dya^{1:r} = dxb^{1:r}$$

$$dx:dy = a^{1:r}:b^{1:r} = AC:AE$$

$$a^{1:r}:b^{1:r} = \frac{na}{r}:AE.$$

Dero-

Derowegen ist $AE = nab^{1:r} : ra^{1:r}$

$$= \frac{na^{(r-1):r}b^{1:r}}{r} = (n:r)\sqrt[r]{a^{r-1}b}.$$

Die 6. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 78.

52. Den Subtangentem AH in einer Spirallinie zu finden.

Auflösung.

Es sey der halbe Diameter des Circuls $AB = a$, die Peripherie $= b$, der Bogen $BD = x$, $AG = y$, und AC dem Radio AD unendlich nahe; so ist $CD = dx$, $EF = dy$. Weil nun EG ein Bogen ist, welcher mit AG beschrieben worden; so ist

$$AD : AG = CD : EG$$
$$a : y = dx : y\,dx : a.$$

Weil EG mit FA einen rechten Winkel machet (§. 48.), und AH gleichfalls auf EA perpendicular aufgerichtet worden; so ist (§. 184 *Geom.*).

$$FE : EG = GA : AH$$
$$dy : \frac{ydx}{a} = y : \frac{ydx.}{ady}$$

Nun ist für die Archimedische Spirallinie

$ax = by$ (§. 312. *P. I.*)

daher $adx = bdy$

$dx = bdy : a$

$$AH = y^2dx : ady = by^2 : a^2 = axy : a^2 = xy : a.$$

Der 1. Zusatz.

53. Also könnet ihr den Subtangentem nicht finden, ihr müsset vorher den Circulbogen x in eine gerade Linie verwandeln können.

Der

Der 2. Zusatz.

54. Für unendliche Spirallinien ist

$$a^m x^n = b^n y^m \text{ (§. 312. } P.\ I.\text{)}.$$

$$na^m x^{n-1} dx = mb^n y^{m-1} dy$$

$$dx = mb^n y^{m-1} dy : na^m x^{n-1}$$

AH $= y^2 dx : ady = mb^n y^{m+1} : na^{m+1} x^{n-1} = ma^m x^n y : na^{m+1} x^{n-1} = mxy : na.$

Der 3. Zusatz.

55. Setzet, daß der Bogen BC sich zu FC verhalten solle, wie die Abscisse in einer algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate. Solchergestalt ist BC $= x$, CD $= dx$, FC $= y$, EF $= dy$. Tab. IX. Fig. 78.

Nun ist

$$AD : AG = CD : EG$$
$$r : r - y = dx : \frac{rdx - ydx}{r}$$

$$FE : EG = GA : AH$$
$$dy : \frac{rdx - ydx}{r} = r - y : \frac{(r-y)^2 dx}{rdy}.$$

Wenn ihr nun für dx in dem Werthe von AH seinen Werth aus der Gleichung einer algebraischen Linie setzet; so habt ihr den Subtangentem AH.

Z. E. In der Parabel ist $ax = y^2$, und also $dx = 2ydy : a$. Derowegen wenn der Bogen BC die Abscisse einer Parabel, FC die Semiordinate, und a ihren Parameter vorstellet; so ist AH $= 2(r-y)^2 ydy : rady = (2r^2y - 4ry^2 + 2y^3) : ra = (2r^2y - 4arx + 2axy) : ra = \frac{2xy}{r} - 4x + 2ry : a.$

Anmer-

Anmerkung.

56. Ihr könnet BC für die Abscisse und FC für die Semiordinate einer jeden algebraischen Linie annehmen, und aus der allgemeinen Gleichung für alle krumme Linien einen allgemeinen Werth für AH finden.

Die 7. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 79. 57. Den Subtangentem PT in der Conchoide des Nicomedis zu finden.

Auflösung.

Es sey AP$=x$, PM$=y$, Pp$=$MR$=dx$, und Rm$=dy$. Daher ist PT$=ydx:dy$. Es sey ferner AB$=$QM$=a$, CM$=z$, BC$=b$; so ist PB $=a-x$, PC$=a+b-x$. Damit man den Werth von dx aus der Natur der krummen Linie finden möge; so setzet

$$a-x=v \qquad a+b-x=t$$

so ist $-dx=dv \qquad -dx=dt$

Ferner (§. 184. *Geom.*)

$$PB : MQ = PC : MC$$
$$v : a = t : z$$
$$at = vz$$
$$adt = zdv + vdz$$

Endlich (§. 172. *Geom.*) $CM^2 = PC^2 + PM^2$, das ist,

$$z^2 = t^2 + y^2$$
$$2zdz = 2tdt + 2ydy$$
$$zdz = tdt + ydy.$$

Setzet aus den vorhergehenden Gleichungen für dv und dt ihren Werth in den beyden letztern; so habt ihr

$-adx$

$-adx = -zdx + vdz$ $zdz = -tdx + ydy$

$zdx - adx = vdz$ $dz = \frac{-tdx + ydy}{z}$

$\frac{zdx - adx}{v} = dz$

Daher:

$$\frac{zdx - adx}{v} = \frac{-tdx + ydy}{z}$$

$$z^2dx - azdx = -vtdx + vydy$$

$$z^2dx - azdx + vtdx = vydy$$

$$dx = \frac{vydy}{z^2 - az + vt.}$$

Daher ist $PT = ydx : dy = vy^2 : (z^2 - az + vt)$, und die Subnormallinien $ydy : dx = (z^2 - az + vt) : v = t + (z^2 - az) : v$.

Da $v : z - a = z : \frac{(z^2 - az)}{v}$; so ist $(z^2 - az) : v$ die vierte Proportionallinie zu PB, QC und CM. Wenn man nun PC verlängert, bis der verlängerte Theil ihr gleich wird; so hat man die Subnormallinie, und kann demnach die Normallinie und den Tangentem auf eine leichte Weise ziehen.

Die 8. Aufgabe.

58. Den Subtangentem PT in der Cycloide zu finden. Tab. IX. Fig. 80.

Auflösung.

Es sey APB der Circul, welcher die Cycloidem beschreibt, KP der Tangens des Circuls, qm der andern Linie QM unendlich nahe, und MR mit

mit dem unendlich kleinen Bogen Pp parallel, welchen ihr für eine gerade Linie halten könnet. Da nun MS=PO, und der Winkel bey R so groß wie der bey p (§. 97. *Geom.*), folglich, weil bey S und O rechte Winkel sind, RMS=pPO (§. 105. *Geom.*); so ist auch MR=Pp (§.71. *Geom.*). Es sey AP=x, PM=y, so ist Pp=MR=dx, mR =dy. Nun ist Rm mit PM parallel, und daher MmR=TMP (§. 97. *Geom.*). Und weil MR mit TP parallel ist, so ist mRM=mpT=MPT (§. *cit.*), folglich (§. 183. *Geom.*).

$$\begin{array}{l} mR : MR = PM : PT \\ dy : dx = y : \frac{ydx}{dy} \end{array}$$

Nun ist in der Cycloide (§. 310. *P. I.*) $y=x$, und daher $dy=dx$, folglich $ydx:dy=y$.

Der 1. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 80. 59. Wenn ihr also den Tangentem des Circuls PK (§. 48.) ziehet; so ist es auch leicht, den Tangentem der Cycloidis TM zu ziehen.

Der 2. Zusatz.

60. Lasset AP eine andere algebraische krumme Linie seyn, derer Tangentem ihr ziehen könnet, ihre Bögen aber AP die Abscissen der transcendentischen Linie AMC; so könnet ihr auf gleiche Weise ihre Tangentes ziehen. Es sey Z. E.

$$bx=ay$$

so ist $$bdx=ady$$

$$dx=ady:b$$

$$PT=ydx:dy=ayay:bdy=ay:b.$$

Die

Die 9. Aufgabe.

61. Den Subtangentem TP zu der logarithmischen Linie zu finden. Tab. XI. Fig. 81.

Auflösung.

Es sey AH die Axe, PM die Ordinate. Setzet AP$=x$, PM$=y$, so ist Pp$=$RM$=dx$, mR $=dy$, und weil die Aehnlichkeit der Triangel mRM und PMT, wie oben (§. 32.), erwiesen werden kann; so ist (§. 184. *Geom.*).

$$\text{mR} : \text{RM} = \text{PM} : \text{PT}$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}.$$

Setzet eine andere Abscisse $=v$, die zugehörige Semiordinate$=z$; so ist der Subtangens$=zdv : dz$. Weil die Abscissen in einer arithmetischen Progression fortgehen; so ist $dx=dv$ (§. 69. *Arithm.*). Hingegen, weil die Semiordinaten in einer geometrischen fortschreiten (§. 306. *P. I.*), so ist

$$y : y+dy = z : z+dz$$

daher $y : dy = z : dz$ (§. 142. *P. I.*)

Nun ist $dx = dv$

Daher $ydx : dy = zdv : dz$ (§. cit.).

Also sind in der logarithmischen Linie alle Subtangentes einander gleich, oder der Subtangens ist eine unveränderliche Linie.

Von den größten und kleinesten Applicaten der krummen Linien.

Die 9. Erklärung.

62. Wenn die Semiordinaten bis zu einem gewissen Ziele immer mit den Abscissen wachsen,

hernach aber wieder abnehmen, unerachtet diese noch beständig zunehmen; so nennet man die Größte diejenige, wo der Wachsthum aufhöret. Imgleichen, wenn sie auf ein gewisses Ziel immer abnehmen, indem die Abscissen zunehmen, und hernach mit diesen fortwachsen, so heißt diejenige die Kleinste, wo die Vergeringerung aufhöret. Die Methode, einen Werth der Abscisse in lauter unveränderlichen Größen zu finden, dem die größte oder kleineste Applicate oder Semiordinate zukommt, nennet man die Methode von den Größten und Kleinesten (Methodum de maximis & minimis.).

Anmerkung.

63. Man kann hierdurch auch viele andere Fragen auflösen, in welchen das Größte oder Kleineste unter Dingen von einer Art gesucht wird, wie es die folgenden Exempel zeigen werden.

Die 10. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 82. 64. Die größte oder kleineste Applicate in einer algebraischen Linie zu determiniren.

Auflösung.

Es ist klar, daß der Tangens in dem Puncte G, wo die größte oder kleineste Applicate ist, mit der Axe parallel lauft, und daher der Subtangens unendlich groß ist. Wenn nun in allen algebraischen Linien der Subtangens $ydx:dy$ (§. 32.) unendlich groß wird; so ist dy, in Ansehung des Zählers ydx, unendlich klein, weil er dy unendlichemal in sich begreifen muß, und darum $dy=0$ (§. 4.). Suchet derowegen aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie die Differentialgröße der Applicate, und setzet sie $=0$; so könnet ihr aus dieser Gleichung den Werth von x durch gehörige Reduction finden.

In

In einigen Linien fällt der Tangens in die Applicate CG, und alsdenn ist der Subtangens $ydx : dy = 0$. Wenn nun dieser Bruch unendlich klein seyn soll, so muß dy unendlich groß seyn in Ansehung des Zählers ydx. Dannenhero wenn $dy = 0$ keinen möglichen Werth für die Abscisse zur größten Applicate giebt; so setzet $dy = \infty$, das ist einem unendlichen Werthe, und suchet aus dieser Gleichung die Abscisse x. Tab. IX. Fig. 83.

Der 1. Zusatz.

65. Im Circul ist

$$ax - xx = y^2$$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$(adx - 2xdx) : 2y = dy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$a = 2x$$

$$\qquad 2$$

$$\tfrac{1}{2}a = x.$$

Die Abscisse, welche in dem Circul der größten Applicate zugehöret, ist dem halben Diameter gleich.

Der 2. Zusatz.

66. Für unendliche Circul ist

$$max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy = 0$$

$$max^{m-1} = (m+1)x^m$$

$$\qquad x^{m-1}$$

$$ma = (m+1)x$$

$$ma : (m+1) = x.$$

Es sey $m = 3$, so ist es ein Circul von dem dritten Geschlechte, und $x = \tfrac{3}{4}a$.

Der 3. Zusatz.

67. Für unendliche Ellipses ist

$(m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx$

$dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx : (m+n)ay^{m+n-1} = 0$

$nbx^m(a-x)^{n-1} = mbx^{m-1}(a-x)^n$

$x^{m-1}(a-x)^{n-1}$

$nbx = mba - mbx$

$nbx + mbx = mba$

$mx + nx = ma$

$x = ma : (m+n)$.

Es sey $m=1$, $n=1$, so ist es eine Ellipsis von dem ersten Geschlechte und $x=\frac{1}{2}a$, wie im Circul. Hingegen sey $m=2$, $n=1$, so ist es eine Ellipsis von dem andern Geschlechte und $x=\frac{2}{3}a$.

Der 4. Zusatz.

68. Es sey $x^3+y^3=axy$

so ist $3x^2dx+3y^2dy=axdy+aydx$

$3x^2dx-aydx=axdy-3y^2dy$

$(3x^2dx-aydx):(ax-3y^2)=dy=0$

$3x^2=ay$

$3x^2:a=y$

$$x^3 + 27x^6 : a^3 = 3ax^3 : a = 3x^3$$

$$27x^6 = 2a^3x^3$$

$$27x^3 = 2a^3$$

$$3x = a\sqrt[3]{2}$$

$$x = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{2}.$$

Der 5. Zusatz.

69. Es sey $y - a = a^{1:3}(a - x)^{2:3}$

so ist $dy = -2dxa^{1:3} : 3(a - x)^{1:3} = 0$

$-2a^{1:3} = 0.$

Weil ihr keinen Werth von x findet, wenn ihr $dy = 0$ setzet, so nehmet

$$dy = -2dxa^{1:3} : 3(a - x)^{1:3} = \infty.$$

Also ist $3(a - x)^{1:3}$ in Ansehung seines Zählers $2dxa^{1:3}$ unendlich klein. Darum habt ihr

$$3(a - x)^{1:3} = 0$$

$$a - x = 0$$

$$a = x.$$

Die 11. Aufgabe.

70. Aus dem gegebenen Puncte H in der Axe einer krummen Linie an die Peripherie eine gerade Linie HM zu ziehen, welche die kleineste unter allen ist, welche sich aus diesem Puncte ziehen lassen. Tab. IX. Fig. 75.

Auflösung.

Es sey $AP = x$, $PM = y$, $AH = c$, so ist $PH = c - x$, und, weil $PM^2 + PH^2 = MH^2$ (§. 172. Geom.);

Geom.); $c^2-2cx+xx+yy=MH^2$. Nehmet MH an als die Applicate einer krummen Linie, und setzet

$$c^2-2cx+xx+yy=z^2$$

so ist $2xdx-2cdx+2ydy=2zdz$

$$(2xdx-2cdx+2ydy):2z=dz=0$$

$$xdx-cdx+ydy=0.$$

Wenn ihr nun aus der Gleichung für eine krumme Linie den Werth von ydy setzet; so könnet ihr daraus AP determiniren, welcher die Applicate PM zugehöret, dahin die kürzeste Linie HM gezogen wird.

Der 1. Zusatz.

71. Es sey für eine Parabel

$$ax=yy$$

so ist $adx=2ydy$

$$\tfrac{1}{2}adx=ydy$$

$$xdx-cdx+ydy=xdx-cdx+\tfrac{1}{2}adx=0$$

$$x-c+\tfrac{1}{2}a=0$$

$$x=c-\tfrac{1}{2}a.$$

Der 2. Zusatz.

72. Es sey für eine Ellipsin vom erstern Geschlechte (§. 258.).

$ay^2 = abx - bx^2$

so ist $2aydy = abdx - 2bxdx \quad 2a$

$ydy = \frac{1}{2}bdx - bxdx : a$

$$xdx - cdx + ydy = xdx - cdx + \frac{1}{2}bdx - bxdx : a = 0$$

$x - c + \frac{1}{2}b - bx : a = 0$

$ax - ac + \frac{1}{2}ab - bx = 0$

$ax - bx = ac - \frac{1}{2}ab \quad a - b$

$x = (ac - \frac{1}{2}ab) : (a - b).$

Der 3. Zusatz.

73. Auf gleiche Weise findet ihr für die Hyperbel, daß $x = (ac + \frac{1}{2}ab) : (a + b)$.

Die 12. Aufgabe.

74. Eine Linie AB dergestalt in D zu schneiden, daß das Product aus dem Quadrate des einen Theils AD in den andern DB das größte sey unter allen, welche auf dergleichen Art formiret werden können. Tab. VIII. Fig. 67.

Auflösung.

Es sey AB$=a$, AD$=x$, so ist AD^{2}DB$=axx - x^3$. Setzet demnach, es sey eine krumme Linie, in welcher

$$axx - x^3 = aay$$

so ist $2axdx - 3x^2dx - aady$

$$(2axdx - 3x^2dx) : aa = dy = 0$$

$$2ax = 3x^2$$

$$\tfrac{2}{3}a = x$$

Die 13. Aufgabe.

Tab. VIII. Fig. 67. 75. Eine Linie AB dergestalt in D zu schneiden, daß das Product aus einer gegebenen Dignität des einen Theils AD in eine gegebene Dignität des andern Theils DB das größte unter allen sey, welche auf dergleichen Art formiret werden.

Auflösung.

Es sey AB$=a$, AD$=x$; so ist $x^m(a-x)^n$ das größte von seiner Art. Setzet demnach

$$x^m(a-x)^n = a^{m+n-1}y$$

so ist $mx^{m-1}(a-x^n dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx = a^{m+n-1}dy$

$$(mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx) : a^{m+n-1} = dy = 0$$

$$mx^{m-1}(a-x)^n = nx^m(a-x)^{n-1}$$

$$m(a-x)^n = nx(a-x)^{n-1}$$

$$ma - mx = nx$$

$$ma : (m+n) = x.$$

Die

Die 14. Aufgabe.

76. Unter allen Parallelepipedis, welche einem gegebenen Würfel gleich sind, und deren eine Seite gegeben wird, dasjenige zu finden, welches die geringste Fläche hat.

Auflösung.

Es sey b die eine Seite, x die andere, der gegebene Würfel $=a^3$, so ist die dritte $=a^3:bx$.

Folglich die Fläche des Parallelepipedi $2bx + 2a^3:x + 2a^3:b$. Setzet demnach, es sey in einer krummen Linie

$$2bx + 2a^3:x + 2a^3:b = ay$$

so ist $$2bdx - 2a^3dx:x^2 = ady = 0$$

$$2b - 2a^3:x^2 = 0$$

$$bx^2 = a^3$$

$$x^2 = a^3:b$$

$$x = \sqrt{(a^3:b)}.$$

Also sind die drey Seiten b, $\sqrt{(a^3:b)}$ und $a^3:b\sqrt{(a^3:b)} = \sqrt{(a^6:\sqrt{(b^2a^3:b)}} = \sqrt{(a^6:\sqrt{a^3b})} = \sqrt{(a^3:b)}$.

Die 15. Aufgabe.

77. Unter allen Parallelepipedis, welche einem gegebenen Würfel gleich sind, dasjenige zu finden, welches die kleineste Fläche hat.

Auflösung.

Es sey der gegebene Würfel $=a^3$, die eine Seite $=x$, so sind die beyden andern Seiten (§. 76.)

$\sqrt{(a^3:x)}$, und daher ist die Fläche des Parallelepipedi $=2a^3:x+4\sqrt{a^3x}$. Da nun dieses die kleinste von ihrer Art ist, so setzet die Gleichung für eine krumme Linie

$$2a^3:x+4\sqrt{a^3x}=ay$$

so ist $$-2a^3dx:x^2+2a^3dx:\sqrt{a^3x}=ady$$

$$-2a^2dx:x^2+2a^2dx:\sqrt{a^3x}=0$$

$$a^2:\sqrt{a^3x}=a^2:x^2$$

$$x^2=\sqrt{a^3x}$$

$$x^4=a^3x$$

$$x^3=a^3$$

$$x=a.$$

Also hat der Würfel selbst die kleinste Fläche.

Die 16. Aufgabe.

78. **Unter allen Kegeln, welche innerhalb einer Kugel beschrieben werden können, denjenigen zu determiniren, welcher die größte Fläche hat.**

Auflösung.

Tab. X. Fig. 84. Es ist klar, daß, wenn sich ein halber Circul um seinen Diameter AB wendet, derselbe eine Kugel, die Triangel aber ANP, AFE &c. Kegel beschreiben. Die Fläche des Kegels kommt heraus, wenn ihr die Seite des Kegels FA durch die halbe Peripherie, welche mit dem Radio FE beschrieben worden ist, multipliciret. Weil ihr nun die

die größte von ihrer Art suchet, so setzet AE$=x$, AB$=a$, und es ist FE$=\sqrt{(ax-xx)}$ (§. 210. *Geom.*) die halbe Peripherie $m\sqrt{(ax-xx)}$, AF $=\sqrt{ax}$. Derowegen habt ihr die Gleichung für eine krumme Linie.

$$m\sqrt{(ax-xx)}\sqrt{ax}=ay$$

$$m\sqrt{(a^2x^2-ax^3)}=ay$$

$$2ma^2xdx-3max^2dx:2\sqrt{(a^2x^2-ax^3)}=ady$$

$$2ax-3x^2=0$$

$$2a=3x$$

$$\tfrac{2}{3}a=x.$$

Ende des andern Theils

Der

Der dritte Theil, von den Anfangsgründen der Integralrechnung.

Die 1. Erklärung.

1.

Die Integralrechnung ist eine Wissenschaft, aus einer gegebenen unendlich kleinen Größe diejenige endliche zu finden, durch deren Differentiirung sie entstehet.

Zusatz.

2. Derowegen habt ihr eine gewisse Probe, ob ihr die rechte Größe gefunden habt, wenn ihr die gefundene Integral nach den oben gegebenen Regeln differentiiret, und die gegebene Differential wieder herauskommt.

Die 2. Erklärung.

3. Integriren oder Summiren heißt die Größe finden, aus welcher durch Differentiirung die gegebene unendlich kleine entstanden ist.

Die 1. Aufgabe.

4. **Eine gegebene Differential zu integriren oder zu summiren.**

Auflösung.

Gleichwie man die Differentialen der veränderlichen Größen durch d andeutet; so pflegt man die

In-

Integralen derselben, als die Summe unendlich kleiner Größen, durch $\int$ anzudeuten. Daher heißt $\int ydx$ so viel als die Integrale von ydx.

Wenn ihr nun die Integrale finden wollet, so vergleichet die gegebene Differentiale mit denen, welche ihr oben (§. 13. & *seqq.*) gefunden habt: so werdet ihr bald wahrnehmen, wie die Veränderung vorzunehmen sey. Es ist aber

I. $\int dx$	$= x \pm a$
II. $\int(dx \pm dy)$	$= x \pm y \pm a$ oder $x \pm y$
III. $\int(xdy \pm ydx)$	$= xy$
IV. $\int mx^{m-1}dx$	$= x^{m}$
V. $\int(n:m)x^{n-m:m}dx$	$= x^{n:m}$
VI. $\int(ydx - xdy):y^{2}$	$= x:y$.

Von diesen Formeln seyd ihr gewiß, daß sie sich alle integriren lassen, und zwar setzet ihr in dem andern und ersten Falle nur anstatt dx oder dy die veränderliche Größe x oder y selbst. In dem dritten multipliciret ihr die beyden veränderlichen Größen xy durch einander, wodurch ihre Differentialen dy und dx multipliciret sind. In dem vierten und fünften, (welcher der gewöhnlichste ist) addiret ihr zu dem Exponenten der Dignität der veränderlichen Größe 1, und durch den vermehrten und die Differentiale der veränderlichen Größe dividiret ihr die gegebene Differentiale. Endlich in dem sechsten Falle nehmet ihr die veränderliche Größe mit dem Zeichen — für den Zähler, und die Wurzel von dem Quadrate des Nenners für den Nenner an.

Die 1. Anmerkung.

5. Es können zwar noch viele andere Fälle vorkommen, welche hier nicht berühret werden: allein ihr wer-

det es besser aus Exempeln, als durch weitläuftige Regeln lernen.

Die 2. Anmerkung.

6. Merket aber, daß einige Größen sind, welche sich nicht integriren lassen. Denn, wie man in der gemeinen Algebra zwar alle Größen zu einer verlangten Dignität erheben, nicht aber aus jeder Dignität eine verlangte Wurzel ziehen kann; eben so kann man in der höhern Analysi zwar eine jede veränderliche Größe differentiiren, allein nicht eine jede Differentiale summiren. Gleichwie man aber in der gemeinen Algebra die Wurzel durch Näherung sucht, eben so pflegt man in der höhern die Integrale durch Näherung zu suchen, wo man sie nicht vollkommen haben kann. Allein zur Zeit hat man noch keine Regel, aus welcher man schließen könnte, ob die Summation statt findet, oder nicht, und können wohl einige Differentialen zum Summiren geschickt seyn, welche wir zur Zeit noch nicht summiren können.

Von den Quadraturen der krummen Linien.

Die 3. Erklärung.

Tab. IX. Fig. 75. 7. Die Differentiale oder das Element einer ebenen Fläche, welche in eine krumme und zwo gerade Linien eingeschlossen ist, als AMP, ist das Rectangulum aus der Semiordinate PM in die Differentiale der Absciße Pp.

Der 1. Zusatz.

8. Derowegen, wenn die Semiordinate PM $=y$, AP$=x$, so ist Pp$=dx$, und das Rectangulum PMRp$=ydx$.

Der 2. Zusatz.

9. Weil die Semiordinaten PM und pm einander unendlich nahe sind, so ist ihre Differenz mR, in Ansehung ihrer, nichts (§. 4.), und daher das Rectangulum PMRp dem Trapezio PMmp gleich (§. 5.). Da ihr nun die Figur in unendliche

liche solche Trapezia resolviren könnet; so ist $\int ydx$ der Inhalt der Fläche AMP.

Der 3. Zusatz.

10. Derowegen, wenn ihr aus der Gleichung für eine krumme Linie den Werth von y setzet, und ihr könnet die Differentiale der Fläche integriren, so habt ihr die Quadratur der Fläche gefunden.

Die 2. Aufgabe.

11. Den Inhalt eines Triangels zu finden.

Auflösung.

Wenn ihr die krumme Linie AM als eine gerade ansehet, so ist AMP ein Triangel, und daher auch sein Element ydx. Setzet nun die Höhe des Triangels, von welchem x ein Theil ist, $=a$, die Grundlinie, welche mit PM oder y parallel ist, $=b$; so ist (§. 184. *Geom.*) $a:b=x:y$, folglich Tab. IX. Fig. 75.

$$ay=bx$$

$$y=bx:a$$

$$ydx=bxdx:a$$

$$\int ydx=bx^2:2a \text{ (§. 82.)}.$$

Wenn ihr nun den ganzen Triangel verlanget, so setzet für den Theil der Höhe x, die ganze Höhe a, und ihr findet den Inhalt $ba^2:2a=\frac{1}{2}ab$.

Anmerkung.

12. Dieses Exempel habe ich nur zu dem Ende gegeben, damit ihr sehet, daß durch die Integralrechnung, deren Gründe den Anfängern zuerst zweifelhaft scheinen, weil man den Triangel MmR für nichts ansiehet, eben das gefunden wird, was in der gemeinen Geometrie aus andern Gründen erwiesen worden ist.

Die

Die 3. Aufgabe.

13. Die Parabel zu quadriren.

Auflösung.

In der Apollonischen Parabel ist

$$ax = y^2$$

$$a^{1:2}x^{1:2} = y$$

$$\text{———————} \quad dx$$

$$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx$$

$$\int ydx = \tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{1:2} = \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{x^2y^2} = \tfrac{2}{3}xy.$$

Zusatz.

14. Also verhält sich der Raum in der Parabel AMP zu dem Rectangulo aus der Semiordinate PM in die Absciße AP, wie $\frac{2}{3}xy$ zu xy, das ist, wie 2 zu 3.

Die 4. Aufgabe.

15. Unendliche Parabeln auf einmal zu quadriren.

Auflösung.

Für unendliche Parabeln und noch andere Linien ist

$$a^m x^n = y^r$$

$$a^{m:r}x^{n:r} = y$$

$$ydx = a^{m:r}x^{n:r}dx$$

$$\int ydx = \frac{r}{n+r}a^{m:r}x^{n+r:r} = \frac{r}{n+r}yx.$$

Z. E.

Z. E. Es sey eine Parabel von dem andern Geschlechte, so ist $a^2x=y^3$, daher $r=3$, $x=1$, folglich $\int ydx=\frac{3}{4}xy$.

Die 5. Aufgabe.

16. Das Stück von der Parabel PMNS zu quadriren. Tab. IX. Fig. 75.

Auflösung.

Es sey die unveränderliche Linie $AP=b$, $PS=x$, $SN=y$, der Parameter $=a$; so ist $AS=b+x$, und (§. 217. *P. I.*).

$$ab+ax=y^2$$

$$\sqrt{(ab+ax)}=y$$

$$dx\sqrt{(ab+ax)}=ydx.$$

Damit man dieses Element integriren kann; so setzet

$$\sqrt{(ab+ax)}=v$$

so ist $ab+ax=v^2$

$$adx=2vdv$$

$$dx=2vdv:a$$

$$dx\sqrt{(ab+ax)}=2v^2dv:a$$

$$\int ydx=\tfrac{2}{3}v^3:a=\tfrac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}.$$

Weil x in $P=0$ wird, und auch der Raum PSNM nichts werden muß, wenn $x=0$; hingegen, wenn ihr in der gefundenen Summe $x=0$ setzet, $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ übrig bleibt; so ist klar, daß ihr von dem gefundenen Werthe $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ noch abziehen müsset, damit ihr den Inhalt von dem Raume $PMNS=\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ bekommet. Nämlich $\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}$ ist der ganze parabolische Raum ANS,

und $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ das Stück AMP; folglich der Unterscheid PMNS.

Es könnte auch AS von beständiger Größe angenommen, und x von S angerechnet werden. Wenn nun AS$=b$, SP$=x$; so ist PA$=b-x$, folglich, weil PM$=y$;

$$ab-ax=y^2$$

$$\sqrt{(ab-ax)}=y$$

$$dx\sqrt{(ab-ax)}=ydx.$$

Setzet wie vorhin,

$$ab-ax=v^2$$

so ist $$-adx=2vdv$$

$$dx=-2vdv:a$$

$$dx\sqrt{(ab-ax)}=-2v^2dv:a$$

$$\int ydx=-\tfrac{2}{3}v^3:a=-\tfrac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}.$$

Setzet ferner, wie vorhin, $x=0$; so bleibt $-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ übrig, und demnach müsset ihr $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ addiren, damit der Inhalt des Raums PMNS herauskommt. Nämlich ANS$=\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, und APM $=\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$; folglich PMNS$=\frac{2}{3}b\sqrt{ab}-\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

Zusatz.

17. Wenn also die Gleichung für eine krumme Linie gegeben wird, und man nicht weiß, wo x in der Axe seinen Anfang hat: so erhellet aus der Auflösung, daß man nur $x=0$ setzen darf, um zu finden, ob noch etwas zu addiren oder zu subtrahiren übrig bleibt.

Die

Die 6. Aufgabe.

18. Eine Linie zu quadriren, in welcher $xy^3 = a^4$.

Auflösung.

Weil $xy^3 = a^4$;

so ist $y^3 = a^4 : x = a^4 x^{-1}$

$y = a^{4:3} x^{-1:3}$

$ydx = a^{4:3} x^{-1:3} dx$

$\int ydx = \frac{3}{2} a^{4:3} x^{2:3} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 x^2}$.

Die 7. Aufgabe.

19. Die krumme Linie des *Cartesii* (Tom. 3. Epist. p. 219.) zu quadriren, in welcher $b^2 : x^2 = b - x : y$.

Auflösung.

Weil $b^2 y = bx^2 - x^3$

so ist $y = (bx^2 - x^3) : b^2$

$ydx = (bx^2 dx - x^3 dx) : b^2$

$\int ydx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2$.

Die 8. Aufgabe.

20. Die krumme Linie zu quadriren, deren Gleichung ist $x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^5 = a^4 y$.

Auflösung.

Weil $y = x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a$

so ist $ydx = (x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a) dx$

$\int ydx = x^6 : 6a^4 + x^5 : 5a^3 + x^4 : 4a^2 + x^3 : 3a + ax$.

Die 9. Aufgabe.

21. Eine krumme Linie zu quadriren in welcher $y^2 = x^4 + a^2x^2$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^4 + a^2x^2$;

so ist $y = \sqrt{(x^4 + a^2x^2)} = x\sqrt{(x^2 + a^2)}$

$ydx = xdx\sqrt{(x^2 + a^2)}$.

Damit dieses Element zu dem Integriren geschickt werde, so setzet

$x^2 + a^2 = v^2$,

so ist $2xdx = 2vdv$

$vdx = vdv$

$xdx + \sqrt{(a^2 + x^2)} = v^2dv$

$\int xdx\sqrt{(x^2 + a^2)} = \frac{1}{5}v^5 = \frac{1}{3}(x^2 + a^2)\sqrt{(x^2 + a^2)}$.

Setzet nun $x = 0$, so bleibt $\frac{1}{3}a^3$ übrig. Solchergestalt ist $\int ydx = \frac{1}{3}(x^2 + a^2)\sqrt{(x^2 + a^2)} - \frac{1}{3}a^3$ (§. 94.).

Die 10. Aufgabe.

22. Eine krumme Linie zu quadriren in welcher $y^2 = x^3 + ax^2$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^3 + axx$;

so ist $y = x\sqrt{(x + a)}$

$ydx = xdx\sqrt{(x + a)}$.

Damit dieses Element zu dem Integriren geschickt werde, so setzet

$x + a$

$$x + a = v^2$$

so ist $x = v^2 - a$

$$dx = 2v\,dv$$

$$x\,dx\sqrt{(x+a)} = 2v^4 dv - 2av^2 dv$$

$\int x\,dx\sqrt{(x+a)} = \frac{2}{3}v^5 - \frac{2}{3}av^3 = (\frac{2}{3}(xx + 2ax + aa) - \frac{2}{3}(ax + aa))\sqrt{(x+a)} = (\frac{6}{15}(xx + 2ax + ac) - \frac{10}{15}(ax + aa))\sqrt{(x+a)} = (6x^2 + 2ax - 4aa)\sqrt{(x+a)} : 15 + \frac{4}{15}a^2\sqrt{a}$ (§. 94.).

Die 11. Aufgabe.

23. Eine krumme Linie zu quadriren in welcher $y^2 = x^2 : (x+a)$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^2 : (x+a)$,

so ist $y = x : \sqrt{(x+a)}$

$$y\,dx = x\,dx : \sqrt{(x+a)}.$$

Setzet $\sqrt{(x+a)} = v$;

so ist $x + a = v^2$

$$x = v^2 - a$$

$$dx = 2v\,dv$$

$x\,dx : \sqrt{(x+a)} = (2v^3 dv - 2av\,dv) : v = 2v^2 dv - 2a\,dv$,

$\int x\,dx : \sqrt{(x+a)} = \frac{2}{3}v^3 - 2av = (\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}a - 2)\sqrt{(x+a)} = (\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}a)\sqrt{(x+a)} = \sqrt{(4x^3 - 12ax + 16a^3 : 9)} = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - 3axx + 4a^2} - \frac{4}{3}a\sqrt{a}$ (§. 94).

Die 12. Aufgabe.

24. Die Apollonische Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zu quadriren.

Auflösung.

Für die Apollonische Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist

$$a^2 = by + xy \text{ (§. 287. P. I.)}.$$

daher $a^2 : (b + x) = y$

$$ydx = a^2 dx : (b + x).$$

Damit dieses Element zu dem Integriren geschickt werde, so dividiret in der That

$$b + x) \; a^2 \; \left(\frac{a^2}{b} - \frac{a^2 x}{b^2} + \frac{a^2 x^2}{b^3} - \frac{a^2 x^3}{b^4} \text{ \&c.} \right.$$

$$a^2 + a^2 x : b$$

$$b + x) \; -a^2 x : b$$

$$-a^2 x : b - a^2 x^2 : b^2$$

$$b + x) \; + a^2 x^2 : b^2$$

$$+ a^2 x^2 : b^2 + a^2 x^3 : b^3$$

$$b + x) \; -a^2 x^3 : b^3.$$

Denn ist $a^2 dx : (b + x) = \frac{a^2 dx}{b} - \frac{a^2 x dx}{b^2} + \frac{a^2 x^2 dx}{b^3} - \frac{a^2 x^3 dx}{b^4}$ u. s. w. unendlich fort.

Folglich habt ihr $\int ydx = \frac{a^2 x}{b} - \frac{a^2 x^2}{2b^2} + \frac{a^2 x^3}{3b^3} - \frac{a^2 x^4}{4b^4}$ u. s. w. unendlich fort, das ist, wenn ihr $a = b = 1$ setzet, $x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ &c.

Anmerkung.

25. Diese Quadratur der Hyperbel hat zuerst *Nic. Mercator* in seiner Logarithmotechnia gegeben, welcher

die

die unendlichen Reihen zu Quadrirung der Figuren zuerst gebraucht hat, welche man nicht genau quadriren kann.

Die 13. Aufgabe.

26. **Den Circul zu quadriren.**

Auflösung.

Die Gleichung für den Circul ist

$y^2 = a^2 - x^2$ (§. 198. *P. I.*)

$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$

$ydx = dx\sqrt{(a^2 - x^2)}$,

Ziehet aus $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ die Wurzel, so findet ihr (§. 97. *P. I.*) $ydx = adx - \frac{x^2dx}{2a} - \frac{x^4dx}{8a^3} - \frac{x^6dx}{16a^5} - \frac{5x^8dx}{128a^7}$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integrale $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ u. s. w. unendlich fort den Theil des Circuls BNP ausdruckt. Tab. X. Fig. 84.

Wenn ihr für x den halben Diameter a setzet, so kommt der Werth des Quadranten $a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \frac{a^2}{112} - \frac{5a^2}{1152}$ u. s. w. Setzet $a = \frac{1}{2}$, so ist $a^2 = \frac{1}{4}$, und demnach der ganze Circul $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ u. s. w. unendlich fort.

Anderst.

Es sey CB der Tangens des halben Bogens GB $= x$, der halbe Diameter BA $= a$, so ist BD der Tangens des ganzen Bogens BG $= 2aax:(aa - xx)$ (§. 190. Tab. II. Fig. 15.

(§. 190. *P. I.*), folglich DA$=(a^3+ax^2):(aa-xx)$ (§. *cit.*). Nun ist (§. 185. *Geom.*) DA:DB$=$GA:GH, und AD:AB$=$AG:AH: darum findet ihr GH$=2a^2x:(a^2+x^2)$, und AH$=(a^3-ax^2):(aa+xx)$, endlich BH$=$AB$-$AH$=2ax^2:(aa+xx)$. Wenn ihr der beyden Differentialgrößen von GH und BH, nämlich $(2a^4dx-2a\,x^2dx):(a^2+x^2)^2$ und $4a^8xdx:(a^2+x^2)^2$, Quadrate $(4a^3dx^2-8a^6x^2dx^2+4a^4x^4dx):(a^2+x^2)^4$ und $16a^6x^2dx^2:(a^2+x^2)^4$ zusammen setzet, und aus der Summe $(4a^8dx^2+8a^6x^2dx^2+4a^4x^4dx^2):(a^2+x^2)^4$ die Quadratwurzel $(2a^4dx^2+2a^2x^2dx):(a^2+x^2)^2=2a^2dx:(a^2+x^2)$ ziehet; so habt ihr die Differentiale des Bogens GB. Multipliciret diese in den halben Radium oder $\frac{1}{2}a$; so kommt das Element des Sectoris BGA (§. 171. *Geom.*) heraus $a^3dx:(a^2+x^2)$. Setzet $a=1$; so ist das Element $dx:(1+x^2)$. Nun findet ihr durch die gemeine Division, wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 102.) $1:(1+x^2)=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}$ u. s. w. unendlich fort, und folglich $\int dx:(1+x^2)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}$ u. s. w. unendlich fort. Diese unendliche Reihe ist für den Ausschnitt BAG, dessen halben Bogens Tangens BC$=x$ ist. Nun ist der Tangens des halben Quadranten dem Radio gleich. Derowegen, wenn ihr $x=1$ setzet, so ist $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ u. s. w. unendlich fort der Inhalt des Quadranten. Nehmet ihr endlich den Diameter des Circuls 1 an; so ist eben selbige unendliche Reihe der Inhalt des ganzen Circuls.

Anmerkung.

27. Die erste Reihe für den Circul hat der Herr *Newton*; die andere der Herr von Leibnitz gefunden, und ist

auch

auch schon vorher *Jacob Gregorius* darauf gekommen, ob er sie gleich nicht in Schriften publiciret hat.

Die 14. Aufgabe.

28. Die Ellipsin zu quadriren.

Auflösung.

Es sey $AC=a$, $DC=b$, $PC=x$, $PM=y$; so ist $AP=a-x$, $PB=a+x$, und aus der Natur der Ellipsis Tab. III. Fig. 27.

$AP.PB : AC^2 = PM^2 : CD^2$ (§. 251. *P. I.*)

$aa-xx : aa = yy : bb$

$aayy = bb(aa-xx)$

$y = b\sqrt{(aa-xx)} : a$

$ydx = bdx\sqrt{(aa-xx)} : a.$

Nun ist $\sqrt{(aa-xx)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ u. s. w. unendlich fort (§. 97. *P. I.*).

Derowegen ist $bdx\sqrt{(aa-xx)} : a = bdx - \frac{bx^2dx}{2a^2} - \frac{bx^4dx}{8a^4} - \frac{bx^6dx}{16a^6} - \frac{5bx^8dx}{128a^8}$ u. s. w. unendlich fort.

Folglich ist $\int ydx = bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ u. s. w. unendlich fort.

Wenn ihr für x die halbe Axe a setzet, so bekommet ihr für den Quadranten der Ellipsis $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab - \frac{5}{1152}ab$ u: s. w. unendlich fort, und also für die ganze Ellipsin eben dieselbe Reihe, wenn ihr a für die ganze große, und b für die ganze kleine Axe annehmet.

Der 1. Zusatz.

29. Wenn ihr $\sqrt{ab}=1$ setzet, so kommt die Reihe für den Circul $1-\frac{1}{6}-\frac{1}{40}-\frac{1}{112}-\frac{5}{1152}$ u. s. w. heraus (§. 104.). Derowegen ist die Ellipsis einem Circul gleich, dessen Diameter die mittlere Proportionallinie ist zwischen seiner kleinen und großen Axe, und also verhält sich die Ellipsis zu dem Circul, welcher mit der großen Axe beschrieben wird, wie die kleine Axe zu der großen.

Der 2. Zusatz.

30. Daher dependiret die Quadratur der Ellipsis von der Quadratur des Circuls.

Die 1. Anmerkung.

31. Die Quadratur des Circuls, der Ellipsis und Hyperbel hat noch niemand durch einen endlichen Werth gegeben.

Die 2. Anmerkung.

32. Aus der gefundenen Quadratur der Ellipsis läßt sich nun ferner der Lehrsatz erweisen, welchen wir in der Astronomie (§. 419.) angenommen haben, daß nämlich der Sector des Circuls KAP sich zu dem Sectore CAP verhalte, wie der Circul zu der Ellipsi. Denn es ist klar, daß CLP sich zu KLP verhalte, wie $b\int dx:a\sqrt{(a^2-x^2)}$ zu $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}$ (§. 104. 106.), folglich wie b zu a (§. 144. *P. I.*), oder RE zu DR. Die Triangel aber CAL und KAL verhalten sich, wie CL zu KL (§. 176. *Geom.*), oder wie RE zu DR, folglich sowohl sie, als die Abschnitte PLC und PLK, wie die Ellipsis zu dem Circul (§. 107.). Folglich ist KAL+KLP zu CAL+CLP wie der Circul zu der Ellipsi (§. 142. *P. I.*).

Tab. X. Fig. 85.

Die 3. Anmerkung.

33. Daß aber LC:LK=RE:DR, läßt sich leicht erweisen. Denn vermöge der gegenwärtigen Aufgabe ist $LC=b\sqrt{(aa-xx)}:a$, und $LK=\sqrt{(aa-xx)}$. Daher $LC:LK=b\sqrt{(aa-xx)}:a\sqrt{(aa-xx)}=b:a=RE:DR$.

Die

Die 15. Aufgabe.

34. Den Raum HPMI zwischen der logarithmischen Linie MI und ihrer Axe PH zu finden. Tab. IX. Fig. 81.

Auflösung.

Es sey PM$=y$, Pp$=dx$, der Subtangens $=a$ (§. 61.); so ist $ydx:dy=a$

$$ydx=ady$$

$$\int ydx=ay$$

Der 1. Zusatz.

35. Setzet QS$=z$, so ist HQSI$=az$; folglich PQSM$=ay-az=a(y-z)$, das ist, dem Rectangulo aus dem Subtangente in die Differenz der Semiordinaten PM und QS.

Der 2. Zusatz.

36. Derowegen verhalten sich die Räume zwischen beyden Semiordinaten, wie ihre Differenzen.

Die 16. Aufgabe.

37. Die Spirallinie zu quadriren.

Auflösung.

Es sey alles, wie in der 6. Aufgabe (§. 52.), so ist EG$=ydx:a$: folglich der kleine Sector EAG oder das Element der Fläche $y^2dx:2a$. Nun ist für die Spirallinie (§. 312. *P. I.*). Tab. IX. Fig. 78.

$$ax=by$$

$$a^2x^2:b^2=y^2$$

$$y^2dx:2a=ax^2dx:2bb$$

$$\int y^2dx:2a=ax^3:6bb.$$

Wenn

Wenn ihr für x die ganze Peripherie b setzet, so kommt für den Raum, welchen die ganze Spirallinie einschließet, $\frac{1}{6}ab$.

Der 1. Zusatz.

38. Da nun der umschriebene Circul $\frac{1}{2}ab$ ist, so verhält sich die Spiralfläche zu ihm, wie $\frac{1}{6}ab$ zu $\frac{1}{2}ab$, das ist, wie 1 zu 3 (§. 144. *P. I.*).

Der 2. Zusatz.

39. Für unendliche Spirallinien ist

$$a^m x^n = b^n y^m \quad (\text{§. 312. } P.I.)$$

$$a^m x^n : b^n = y^m$$

$$a x^{n:m} : b^{n:m} = y$$

$$a^2 x^{2n:m} : b^{2n:m} = y^2$$

$$\int y^2 dx : 2a = m a x^{2n+m:m} : (4n+2m) b^{2n:m}.$$

Wenn ihr nun für x die ganze Peripherie b setzet, so bekommet ihr $mab^{2n+m:m} : (4n+2m)b^{2n:m} = mab : (4n+2m)$.

Der 3. Zusatz.

40. Dannenhero verhält sich überhaupt die Spiralfläche zu dem umschriebenen Circul, wie $mab : (4n+2m)$ zu $\frac{1}{2}ab$, das ist, wie $2m$ zu $4n+2m$, oder wie m zu $2n+m$.

Der 4. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 78. 41. Setzet, daß der Bogen BC sich zu EC verhalten solle, wie die Abscisse in einer algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate.

Und

Und es sey der Bogen BC$=x$, AE$=y$, AC $=r$; so ist EC$=r-y$, CD$=dx$ und

$$AC:CD=AE:EG$$
$$r:dx=y:ydx:r$$

folglich das Element oder der Sector AEG $\frac{1}{2}y^2dx:r$. Setzet nun, es sey BC die Absciße, EC die Semiordinate einer Parabel, so ist

$$ax=r^2-2ry+yy$$
$$dx=(2ydy-2rdy):a$$
$$\tfrac{1}{2}y^2dx:r=(y^3dy-ry^2dy):ar$$
$$\int\tfrac{1}{2}y^2dx:r=y^4:4ar-y^3:3a.$$

Der 5. Zusatz.

42. Ihr könnet auch den Raum BFC finden, wenn ihr das Element GDCE suchet, welches ihr findet, wenn ihr CD$+$EG mit $\frac{1}{2}$FC multipliciret (§. 157. *Geom.*), weil ihr es als ein Trapezium ansehen könnet, dessen Bases CD und EG parallel sind. Nun ist CD$+$EG$=dx+ydx:r$, und $\frac{1}{2}$EC $=\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}y$. Derowegen das verlangte Element $(r^2dx-y^2dx):2r$. Nehmet nun, wie in dem vorigen Exempel (§. 119.), $dx=(2ydy-2rdy):a$, so ist das besondere Element $(ry^2dy+r^2ydy-y^3dy-r^3dy):ar$, dessen Integrale $y^3:3a+ry^2:2a-y^4:4ar-r^2y:a$ den verlangten Raum giebt. Tab. IX. Fig. 78.

Die 17. Aufgabe.

43. Die Fläche eines jeden Körpers zu finden, welcher erzeuget wird, indem eine krumme Linie sich um ihre Axe bewegt. Tab. IX. Fig. 75.

Auflö-

Auflösung.

Setzet die Verhältniß des halben Diameters zu der Peripherie $=r:c$, die Abscisse AP$=x$, die Semiordinate PM$=y$, so ist Pp$=dx$, mR$=dy$, Mm$=\surd(dx^2+dy^2)$ (§. 172. *Geom.*) und die Peripherie, welche mit PM beschrieben wird, $=cy:r$. Daher das Element der Fläche $cy\surd(dx^2+dy^2):r$. Wenn ihr nun für dx^2 oder dy^2 seinen Werth aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie setzet, und das Element hernach integriret; so kommt der Inhalt eines Stücks von der verlangten Fläche heraus.

Der 1. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 75. 44. Es sey AMP ein Triangel, dessen Höhe $=a$, die Grundlinie $=r$, so ist $ay=rx$ (§. 184.) *Geom.* & §. 137. *P. I. Algebr.*), und dannenhero

$$x:y=a:r$$

$$ady:r=dx$$

$$a^2dy^2:r^2=dx^2$$

$$cy\surd(dx^2+dy^2):r=cy\surd(a^2dy^2+r^2dy^2):r^2$$

$$cy\surd(dx^2+dy^2):r=cydy\surd(a^2+r^2):r^2$$

$$\int cy\surd(dx^2+dy^2):r=cy^2\surd(a^2+r^2):2r^2.$$

Setzet für y die Grundlinie r; so kommt die Fläche des Coni heraus $\frac{1}{2}c\surd(r^2+a^2)$. Da nun $\surd(r^2+a^2)$ seine Seite ist: so sehet ihr, daß die Kegelfläche einem Triangel gleich sey, dessen Grundlinie die Peripherie der Grundfläche des Kegels und die Höhe seiner Seite gleich ist.

Der 2. Zusatz.

45. Wenn ihr für die zu beschreibende Linie einen halben Circul annehmet, so findet ihr die Kugelfläche. Da nun im Circul

$$2rx - xx = y^2$$

so ist $2rdx - 2xdx = 2ydy$

$$(rdx - xdx):y = dy$$

$$(r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2):y^2 = dy^2$$

$cy\surd(dx^2 + dy^2):r = cy\surd(dx^2 + (r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2):(2rx - xx)):r = cy\surd(2rxdx^2 - x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2):(2rx - xx):r = cy\surd(r^2dx^2 : y^2):r = cyrdx:ry = cdx.$

$\int cdx = cx.$

Setzet für x den Diameter $2r$, so ist die ganze Kugelfläche $2cr$.

Der 3. Zusatz.

46. Da nun die Fläche des größten Circuls $\frac{1}{2}cr$; so ist die Fläche der Kugel viermal so groß als ihr größter Circul. Hingegen jedes Stück der Kugelfläche verhält sich zu der ganzen, wie cx zu $2cr$, das ist, wie x zu $2r$, oder die Höhe des Stücks der Kugel zu dem ganzen Diameter.

Der 4. Zusatz.

47. Es sey die zu beschreibende Linie eine Parabel, so findet ihr die Fläche eines parabolischen Afterkegels. Da nun in der Parabel

adx

$$adx = 2ydy$$

so ist $dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$

$cy\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r = cy\sqrt{(4y^2dy^2 + a\,dy^2 : a^2)} : r$ $= cydy\sqrt{(4yy + aa)} : ar.$

Setzet $\sqrt{(4yy + aa)} = v$

so ist $4yy + aa = v^2$

$8ydy = 2vdv$

$cydy\sqrt{(4yy + aa)} : ar = cv^2dv : 4ar$

$\int cv^2dv : 4ar = cv^3 : 12ar = (4cyy + caa)\sqrt{(4yy + aa)}$ $: 12ar - ca^2 : 12r$ (§. 94.).

Setzet r für y, so habt ihr die Fläche des ganzen Afterkegels $(4crr + caa)\sqrt{(4rr + aa)} : 12ar - ca^2 : 12r$.

Von der Rectification der krummen Linien.

Die 4. Erklärung.

48. Eine krumme Linie rectificiren heißt so viel, als die Länge derselben finden.

Der 1. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 75. 49. Wenn die beyden Semiordinaten PM und pm einander unendlich nahe sind, so ist der Bogen Mm das Element des Bogens AM, das ist, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Der 2. Zusatz.

50. Derowegen, wenn ihr vor dx^2 oder dy^2 den Werth aus der Natur der krummen Linie setzet, und das besondere Element integriret; so habt ihr die krumme Linie oder ihren Bogen rectificiret.

Der

Der 3. Zusatz.

51. Ihr könnet auch das Element Mm finden, wenn ihr setzet $PM : TM = dy : Mm$.

Die 18. Aufgabe.

52. Die Parabel zu rectificiren.

Auflösung.

In der Parabel ist $ax = y^2$

$$adx = 2ydy$$

$$a^2dx^2 = 4y\,dy^2$$

$$dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$$

$$\surd(dx^2 + dy^2) = \surd(dy^2 + 4y\,dy^2 : a^2)$$

das ist, $= dy\surd(aa + 4y^2) : a$.

Damit ihr nun dieses Element integriren könnet, so ziehet (§. 95. *P. I.*) die Wurzel aus $(aa + 4y^2)$. Es ist nämlich

$n = 2$, $m = 1$, $P = a^2$, $Q = 4y^2 : a^2$

$P^{m:n} = a = A$

$$\frac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2}a . 4y^2 : a^2 = 2y^2 : a = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{1}{2}y^2 : a . 4y^2 : a^2 = -2y^4 : a^3 = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{3}{6} . -2y^4 : a^3 . 4y^2 : a^2 = 4y^6 : a^5 = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8} . 4y^6 : a^5 . 4y^2 : a^2 = -10y^8 : a^7 = E$$

u. s. w. unendlich fort.

Demnach ist $\sqrt{}(aa + 4y^2 = a + \frac{2y^2}{a} - \frac{2y^4}{a^3} + \frac{4y^6}{a^5} - \frac{10y^8}{a^7}$ &c. und daher $dy(\sqrt{}aa + 4y^2) : a = dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6dy}{a^6} - \frac{10y^8dy}{a^8}$ &c. Deren Integrale $y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ &c. Die Länge des Bogens AM exprimiret.

Tab. IX. Fig. 75.

Die 19. Aufgabe.

53. Die Parabel zu rectificiren, in welcher $ax^2 = y^3$.

Auflösung.

Weil $ax^2 = y^3$

so ist $2axdx = 3y^2dy$

$4a^2x^2dx^2 = 9y^4dy^2$

$dx^2 = 9y^4dy^2 : 4a^2x^2 = 9ydy^2 : 4a$

$\sqrt{}(dx^2 + dy^2) = \sqrt{}((9ydy^2 + 4ady^2) : 4a) = dy\sqrt{}((9y + 4a) : 4a).$

Setzet $\sqrt{}((9y + 4a) : 4a) = v$

so ist $9y + 4a = 4av^2$

$9dy = 8avdv$

$dy\sqrt{}(9y + 4a : 4a) = \frac{8}{9}av^2dv$

$\int dy\sqrt{}(9y + 4a : 4a) = \frac{8}{27}av^3 = \frac{8}{27}(9y + 4 : 4)\sqrt{}(9y + 4 : 4) = \frac{8}{27}(9y + 4)\frac{1}{8}\sqrt{}(9y + 4) = \frac{1}{27}(9y + 4)\sqrt{}(9y + 4) - \frac{8}{27}$ (§. 16.), wenn $y = 0$.

Die

Die 20. Aufgabe.

54. Unendliche Parabeln zu rectificiren.

Auflösung.

Für unendliche Parabeln ist

$y^n = a^{n-1}x = x$, wenn $a = 1$.

$ny^{n-1}dy = dx$

$n^2y^{2n-2}dy^2 = dx^2$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(n^2y^{2n-2}dy^2 + dy^2)} = dy\sqrt{(n^2y^{2n-2} + 1)}$.

Ziehet nun aus $(1 + n^2y^{2n-2})$ die Wurzel (§. 95. P. I.), und setzet, der Kürze halber, $2n - 2 = r$, so ist in dem Newtonischen Lehrsatze $m = 1$, $n = 2$, $P = 1$, $Q = n^2y^r$.

$P^{m:n} = 1 = A$.

$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}n^2y^r = B$.

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}n^2y^r\cdot\frac{1}{8}n^2y^r = -n^4y^{2r} = C$.

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{3}{6}\cdot -\frac{1}{8}n^4y^{2r}\cdot n^2y^r = +\frac{1}{16}n^6y^3 = D$.

$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{16}n^6y^{3r}\cdot n^2y^r = -\frac{5}{128}n^8y^{4r} = E$ &c.

Demnach ist $dy\sqrt{(1 + n^2y^{2n-2})} = dy + \frac{1}{2}n^2y^rdy - \frac{1}{8}n^4y^{2r}dy + \frac{1}{16}n^6y^{3r}dy - \frac{5}{128}n^8y^{4r}dy$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integrale $y + \frac{n^2y^{r+1}}{2(r+1)} - \frac{n^4y^{2r+1}}{8(2r+1)} + \frac{n^6y^{3r+1}}{48(3r+1)} - \frac{5n^8y^{4r+1}}{128(4r+1)}$ u. s. w. unendlich fort, die

Länge unendlicher Parabeln ausdrückt. Wollet ihr für r seinen Werth $2n-2$ in die Stelle setzen, so bekommet ihr $y + \frac{ny^{2n-1}}{2(2n-1)} - \frac{n^4y^{4n-3}}{8(4n-3)} + \frac{n^6y^{6n-5}}{16(6n-5)}$ $- \frac{5n^8y^{8n-7}}{128(8n-7)}$ &c.

Es sey z. E. $n=2$, so bekommet ihr $y + \frac{4y^3}{2.3}$ $- \frac{16y^5}{8.5} + \frac{4.16y^7}{16.7}$, &c. das ist, $y + \frac{2y^3}{3} - \frac{2y^5}{5} + \frac{4y^7}{7}$ &c. für die Apollonische Parabel, welche Reihe mit der oben gefundenen übereinkommt, wenn ihr $a=1$ setzet.

Die 21. Aufgabe.

55. Aus dem gegebenen Tangente eines Circulbogens den Bogen zu finden.

Auflösung.

Tab. IX. Fig. 76. Es sey der Tangens $KB=x$, $BC=1$, so ist $SK=dx$, $KC=\sqrt{(1+xx)}$, $SL=xdx:\sqrt{(1+xx)}$, wenn nämlich KC und SC einander unendlich nahe sind. Da nun bey L und B rechte Winkel sind (§. 48. *P. II.*), und BKC=KSL, weil KCL unendlich klein ist (§. 101. *Geom.*); so ist KC:BC=SK:KL (§. 163. *Geom.*), das ist:

$$\sqrt{(1+x^2)}:1=dx : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}.$$

Ferner KC:KL=NC:Nn (§. 163. *Geom.*)

$$\sqrt{(1+x^2)} : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = 1 : \frac{dx}{1+x^2}.$$

Wenn

Wenn ihr nun dx durch $1+x^2$ würklich dividiret, so bekommet ihr für das Element Nn des Bogens BN, $dx-x^2x+dx+x^4dx-x^6dx+x^8dx-x^{10}dx$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integrale $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{11}x^{11}$ u. s. w. unendlich fort den Bogen BN exprimiret, dessen Tangens $BK=x$.

Der 1. Zusatz.

56. Der Tangens des Bogens von 45° ist dem Radio BC gleich, und also wird $x=1$, folglich der Bogen von 45° oder der halbe Quadrant $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ &c. Setzet ihr aber den ganzen Diameter eins, so ist der Quadrant $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ &c.

Der 2. Zusatz.

57. Derowegen verhält sich das Quadrat des Diameters zu der Circulfläche; wie der Diameter zu dem Quadranten von der Peripherie (§. 26.).

Anmerkung.

58. Ihr hättet auf eben diese Art den Circul quadriren können (§. 26.).

Die 22. Aufgabe.

59. **Aus dem gegebenen Bogen eines Circuls BN, welcher kleiner ist als ein Quadrant, den Tangentem BK zu finden.** Tab. IX. Fig. 76.

Auflösung.

Wenn der Tangens x ist, der Bogen v, so ist $v=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$ &c. (§. 55.).

Setzet $x=av+bv^3+cv^5+dv^7$ &c. weil nun $-v+x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$ &c. $=0$, und

$$\left.\begin{array}{llll} x^3 = a^3v^3 + 3a^2bv^5 & + & 3ab^2v^7 & \&c. \\ & + & 3a^2cv^7 & \&c. \\ x^5 = \quad + a^5v^5 & + & 5a^4bv^7 & \&c. \\ x^7 = & + & a^7v^7 & \&c. \end{array}\right\} (\S.\ 91.\ P.\ I.)$$

so ist

$$-v = -v$$

$$x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \ \&c.$$

$$-\tfrac{1}{3}x^3 = -\tfrac{1}{3}a^3v^3 - a^2bv^5 - ab^2v^7 \ \&c.$$

$$-a^2cv^7 \ \&c.$$

$$+\tfrac{1}{5}x^5 = +\tfrac{1}{5}a^5v^5 + a^4bv^7 \ \&c.$$

$$-\tfrac{1}{7}x^7 = -\tfrac{1}{7}a^7v^7 \ \&c.$$

Demnach

$$\frac{a - 1 = 0}{a = 1} \qquad \frac{b - \tfrac{1}{3} = 0}{b = \tfrac{1}{3}} \qquad \frac{c - a^2b + \tfrac{1}{5}a = 0}{c = b - \tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}}$$

$$\frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{d - ab^2 - a^2c + a^4b - \tfrac{1}{7}a^7 = 0}{d = b^2 + c + \tfrac{1}{7} - b = \tfrac{1}{9} + \tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{3}}$$

$$= \tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{2}{9} = \frac{126 + 135 - 210}{945} = \frac{51}{945} = \frac{17}{315}.$$

Setzet nun diese gefundenen Werthe für a, b, c, d &c. in die angenommene Reihe für den Tangentem; so bekommet ihr $x = v + \tfrac{1}{3}v^3 + \frac{\tfrac{2}{15}v^3}{25}$ $+ \frac{\tfrac{17}{315}v^7}{315}$ &c.

Die 23. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 76.

60. Aus dem gegebenen Sinu eines Bogens, MP den Bogen AM, welcher kleiner als ein Quadrant ist, zu finden.

Auflö-

Auflösung.

Wenn der halbe Diameter des Circuls r, der Sinus des Bogens, oder die Semiordinate y, der Sinus versus AP oder die Abscisse x ist; so ist die Aequation des Circuls

$$2rx - xx = yy$$

daher $$2rdx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = ydy : (r - x)$$

$$dx^2 = y^2dy^2 : (r^2 - 2rx + xx)$$

das ist, $$= y^2dy^2 : (r^2 - y^2)$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(y^2dy^2 + r^2dy^2 - y^2dy^2)} : \sqrt{(r^2 - y^2)}$$
$$= rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)}.$$

Damit dieses Element des Bogens zu dem Integriren geschickt werde, so ziehet aus $1 : (r^2 - y^2)$ die Wurzel in der That (§. 95. *P. I.*). Es ist aber $m = -1$, $n = 2$, $P = r^2$, $Q = -y^2 : r^2$.

$$P^{m:n} = r^{-1} = 1 : r = A.$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\frac{1}{2}.\frac{1}{r}.-\frac{y^2}{r^2} = +\frac{y^2}{2r^3} = B.$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{3}{4}.\frac{y^2}{2r^3}.-\frac{y^2}{r^2} = +\frac{3y^4}{8r^3} = C.$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{5}{6}.\frac{3y^4}{8r^5}.-\frac{y^2}{r^2} = +\frac{5y^6}{16r^7} = D.$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{7}{8}.\frac{5y^6}{16r^7}.-\frac{y^2}{r^2} = +\frac{35y^8}{128r^9} = E.$$

u. s. w. unendlich fort.

Also ist $rdy(r^2-y^2)^{-1:2} = dy + \frac{y^2dy}{2r^2} + \frac{3y^4dy}{8r^4} + \frac{5y^6dy}{16r^6} + \frac{35y^8dy}{128r^8}$ &c. dessen Integrale $y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8}$ &c. den verlangten Bogen AM durch seinen Sinum ausdrückt. Wenn ihr besser sehen wollet, wie die Reihe unendlich fortgeht, so nennet das erste Glied A, das andere B, das dritte C u. s. w. so findet ihr $y + \frac{1.1y^2A}{2.3r^2} + \frac{3.3y^2B}{4.5r^2} + \frac{5.5y^2C}{6.7r^2} + \frac{7.7y^2D}{8.9r^2} + \frac{9.9y^2E}{10.11r^2}$ &c.

Zusatz.

61. Weil der Bogen $v = y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8}$ &c. so findet ihr, wie in der 22. Aufgabe (§. 59.) $y = v - \frac{v^3}{6r^2} + \frac{v^5}{120r^4} - \frac{v^7}{5040r^6} + \frac{v^9}{362880r^8}$ &c. $= \frac{v}{1} - \frac{v^3}{1.2.3r^2} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5r^4} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7r^6} + \frac{v^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9r^8}$ &c.

das ist, wenn ihr das erste Glied A, das andere B, das dritte C &c. setzet, $y = v - \frac{v^2A}{2.3r^2} + \frac{v^2B}{4.5r^2} - \frac{v^2C}{6.7r^2} + \frac{v^2D}{8.9r^2}$ &c.

Die 24. Aufgabe.

62. Aus dem gegebenen Sinu verso AP den Bogen des Circuls AM zu finden. Tab. IX. Fig. 76.

Auflösung.

Wenn der Diameter des Circuls $2r$, die Abscisse oder der Sinus versus $AP = x$ ist, so ist für den Circul

$$2rx - xx = yy$$

$$2rdx - 2xdx = 2ydy$$

$$(rdx - xdx):y = dy$$

$$(r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2):y^2 = dy^2$$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + (r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx))} = \sqrt{((2rxdx^2 - x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx))} = rdx : \sqrt{(2rx - xx)} = rdx\,(2rx - x^2)^{-1:2}$, oder wenn ihr $2r = 1$ setzet, $\frac{1}{2}dx\,(x - x^2)^{-1:2}$. Damit dieses Element zu dem Integriren geschickt werde, so ziehet aus $(x - x^2)^{-1}$ die Wurzel in der That (§. 95. *P. I.*).

Es ist aber $m = -1$, $n = 2$, $P = x$, $Q = -x$, und demnach

$$P^{m:n} = x^{-1:2} = A.$$

$$\frac{m}{n} AQ = -\tfrac{1}{2} . x^{-1:2} . -x = \tfrac{1}{2} x^{1:2} = B.$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{3}{4} . \tfrac{1}{2} x^{1:2} . -x = \frac{1.3}{2.4} x^{3:2} = C.$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5.1.3}{2.4.6} x^{3:2} . -x = \frac{1.3.5}{2.4.6} x^{5:2} = D.$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{7.1.3.5}{2.4.6.8} x^{5:2} . -x = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} x^{7:2} \text{ \&c.}$$

Daher ist $\frac{1}{2}dx:\sqrt{(x-xx)}=\frac{1}{2}x^{-1:2}dx+\frac{1}{4}x^{1:2}dx+\frac{1.3}{4.4}x^{3:2}dx+\frac{1.3.5}{4.4.6}x^{5:2}dx+\frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}x^{7:2}dx$ &c. und folglich der Bogen AP als desselben Integrale $=x^{1:2}+\frac{1}{2.3}x^{3:2}+\frac{1.3}{2.4.5}x^{5:2}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^{7:2}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^{9:2}$ &c. oder $\sqrt{x}(1+\frac{1}{2.3}x+\frac{1.3}{2.4.5}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x$ &c.)

Zusatz.

63. Wollet ihr den Sinum versum durch den Bogen ausdrücken, so werdet ihr auf die Art, wie oben (§.59.) finden $x=\frac{v^2}{1.2}-\frac{v^4}{1.2.3.4}+\frac{v^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c. = (wenn ihr das erste Glied A, das andere B u. s. w. setzet) $\frac{v^2}{1.2}-\frac{v^2A}{3.4}+\frac{v^2B}{5.6}-\frac{v^2C}{7.8}$ &c.

Von der Cubatur der Körper.

Die 5. Erklärung.

64. **Cubiren heißt den Inhalt eines Körpers finden.**

Der 1. Zusatz.

65. Wenn ein Körper erzeugt wird, indem eine Figur sich um ihre Axe herum bewegt, so beschreibt jede Semiordinate einen Circul, und dannenhero ist das Element desselben das Product aus einem Circul, der mit der Semiordinate beschrieben wird, in die Differentiale der Abscisse.

Wenn

Wenn ihr demnach die Verhältniß des Radii zu der Peripherie setzet $r:p$, so ist die Peripherie des gedachten Circuls $py:r$ und der Inhalt $py:2r$ (§. 162. *Geom.*), folglich das Element $py^2dx:2r$.

Der 2. Zusatz.

66. Wenn ihr demnach den Werth von y^2 durch x aus der Gleichung für die gegebene Figur setzet und das Element integriret; so habt ihr den verlangten Inhalt des Körpers.

Die 25. Aufgabe.

67. Den Conum zu cubiren.

Auflösung.

Weil der Conus von einem Triangel beschrieben wird (§. 35. *Geom.*), so habt ihr (wenn die Höhe des Triangels a, die Grundlinie r ist).

$$rx = ay$$

$$r^2x^2 : a^2 = y^2$$

$$py^2dx : 2r = prx^2dx : 2a^2$$

$$\int py^2dx : 2r = prx^3 : 6a^2.$$

Wenn ihr den ganzen Kegel verlanget, so setzet a für x, und ihr findet seinen Inhalt $pra^3 : 6a^2 = \frac{1}{6}pra = \frac{1}{2}pr.\frac{1}{3}a$, das ist, wenn ihr die Grundfläche $\frac{1}{2}pr$ durch den dritten Theil der Höhe $\frac{1}{3}a$ multipliciret.

Die 26. Aufgabe.

68. Die Kugel zu cubiren.

Auflösung.

Die Kugel wird von einem halben Circul beschrieben (§. 27. *Geom.*). in welchem (§. 198. *P. I.*).

$2rx - xx = yy$

daher ist $py^2dx : 2r = pxdx - px^2dx : 2r$

$\int py^2dx : 2r = \frac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r.$

Wenn ihr die ganze Kugel verlanget, so setzet $2r$ oder den Diameter für x oder die Höhe des Kugelstücks, und ihr bekommet für ihren Inhalt $2pr^2 - 8pr^2 : 6 = 4pr^2 : 6 = \frac{2}{3}pr^2$.

Zusatz.

69. Der Inhalt eines umschriebenen Cylinders, dessen Höhe nämlich dem Diameter, die Grundfläche dem größten Circul der Kugel gleichet, ist pr^2, und demnach verhält er sich zur Kugel wie pr^2 zu $\frac{2}{3}pr^2$, das ist, wie 3 zu 2.

Die 27. Aufgabe.

70. Einen parabolischen Afterkegel zu cubiren.

Auflösung.

In der Parabel ist

$y^2 = ax$

daher $py^2dx : 2r = apxdx : 2r$

$\int py^2dx : 2r = apx^2 : 4r = py^2x : 4r.$

Wenn die Höhe des ganzen Kegels b und der halbe Diameter in der Grundfläche r ist; so ist der Inhalt desselben $bpr^2 : 4r = \frac{1}{4}bpr$.

Zusatz.

71. Da nun der umschriebene Cylinder $\frac{1}{2}bpr$ ist, so verhält sich dieser zu dem parabolischen Afterkegel wie $\frac{1}{2}bpr$ zu $\frac{1}{4}bpr$, das ist, wie 2 zu 1.

Die

Die 28. Aufgabe.

72. **Unendliche parabolische Afterkegel auf einmal zu cubiren.**

Auflösung.

Es sey der Parameter $=1$, so ist für unendliche Parabeln

$$y^{m}=x$$

$$y=x^{1:m}$$

$$y^{2}=x^{2:m}$$

$$py^{2}dx:2r=px^{2:m}dx:2r$$

$$\int py^{2}dx:2r=mpx^{2+m:m}:(4+2m)r=mpxy^{2}:(2m+4)r.$$

Die 29. Aufgabe.

73. **Eine elliptische Afterkugel zu cubiren.**

Auflösung.

Es sey der kleine Diameter in der Ellipsi $2r$, der große $=2a$, so ist

$$yy=rr-r^{2}x^{2}:a^{2}\ (\text{§. } 253.\ P. I.)$$

$$py^{2}dx:2r=\tfrac{1}{2}prdx-prx^{2}dx:2a^{2}$$

$$\int py^{2}dx:2r=\tfrac{1}{2}prx-prx^{3}:6a^{2}.$$

Setzet für x die ganze große Axe $2a$, so kommt der Inhalt des ganzen Körpers $apr-\tfrac{2}{6}apr=\tfrac{4}{6}apr$ $=\tfrac{2}{3}apr$.

Der 1. Zusatz.

74. Der umschriebene Cylinder ist apr (§. 221. *Geom.*), und demnach verhält er sich zu der elliptischen Afterkugel wie apr zu $\tfrac{2}{3}apr$, das ist, wie 1 zu $\tfrac{2}{3}$, oder 3 zu 2.

Der

Der 2. Zusatz.

75. Die Kugel, deren Diameter dem großen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $2a^3p : 3r$ (§. 69.). Demnach verhält sie sich zu der elliptischen Afterkugel wie $2a^3p : 3r$ zu $\frac{2}{3}apr$, das ist, wie a^2 zu r^2, oder wie das Quadrat der großen Axe zu dem Quadrate der kleinen.

Der 3. Zusatz.

76. Die Kugel, deren Diameter dem kleinen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $\frac{2}{3}pr^2$ (§. 69.). Derowegen verhält sie sich zu der elliptischen Afterkugel wie $\frac{2}{3}pr$ zu $\frac{2}{3}apr$, das ist, wie r zu a, oder die kleine Axe zu der großen.

Die 30. Aufgabe.

77. **Einen hyperbolischen Afterkegel zu cubiren.**

Auflösung.

Es sey die Zwerchaxe $=2a$, die kleine Axe $=2r$, die Abscisse $=x$, die Semiordinate $=y$, so ist (§. 269. *P. I.*)

$$rr : aa = y^2 : 2ax + xx$$

$$y^2 = (2ar^2x + r^2x^2) : a^2$$

$$py^2dx : 2r = prxdx : a + prx^2dx : 2a^2$$

$$\int py^2dx : 2r = prx^2 : 2a + prx^3 : 6a^2.$$

Setzet für x die ganze Höhe des Afterkegels b, so kommt sein Inhalt $prb^2 : 2a + prb^3 : 6a^2$.

Die 31. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 81. 78. **Den Inhalt des Körpers zu finden, welcher erzeugt wird, indem der Raum zwischen**

der logarithmischen Linie MI und der geraden Linie PH sich um PH herum bewegt.

Auflösung.

In der logarithmischen Linie, deren Subtangens $= a$, ist

$$ydx = ady \text{ (§. 34.)}$$

$$dx = ady : y$$

$$py^2dx : 2r = apy^2dy : 2ry = apydy : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = apy^2 : 4r.$$

Nehmet r für die letzte Semiordinate AB an, so ist der Inhalt des ganzen Körpers $\frac{1}{4}apr$, welcher durch die Bewegung des unendlichen Raums IBAH beschrieben wird.

Die 32. Aufgabe.

79. Den Inhalt eines Körpers zu finden, welcher beschrieben wird, indem sich eine halbe Parabel ANS um ihre Semiordinate bewegt. Tab. IX. Fig. 75.

Auflösung.

In diesem Falle ist das Element gleich dem Producte aus einem Circul, welcher mit MT der Differenz zwischen der Abscisse AP und AS beschrieben wird, in die Differentiale der Semiordinate. Setzet nun AS$=r$, NS$=b$, AP$=x$, so ist PS $=$MT$=r-x$. Wenn nun die Verhältniß des Radii zur Peripherie $r:p$, so findet ihr die Peripherie, welche mit MT beschrieben worden ist, $(rp-px):r$, folglich den Circul $(r^2p-2rpx+px^2)$ $:2r$. Dannenhero ist das Element $(r^2pdy-2rpxdy$ $+px^2dy):2r$. Nun ist in der Parabel, wenn der Parameter$=1$, $y^2=x$ (§. 217. *P. I.*) und $y^4=x^2$.

Daher

Daher das Element $\frac{1}{2}rpdy - py^3dy + py^4dy : 2r$, dessen Integrale $\frac{1}{2}rpy - \frac{1}{3}py^3 + py^5 : 10r$ das Stück des Körpers exprimirt, welches von MNT beschrieben worden ist.

Wenn ihr für y^2 seinen Werth x setzet, so habt ihr für eben dasselbe Stück $\frac{1}{2}rpy - \frac{1}{3}pxy + px^2y : 10r$. Setzet nun ferner r für x und b für y; so bekommet ihr für den ganzen Körper $\frac{1}{2}rpb - \frac{1}{3}prb + pr^2b : 10r = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10})bpr = \frac{(30 - 20 + 6)bpr}{60} = \frac{4}{15}bpr$.

Anmerkung.

80. Auf gleiche Weise könnet ihr den Inhalt der Körper finden, wenn ihr setzet, daß sich eine Fläche um eine andere Linie, als z. E. um den Tangentem oder die Subnormallinie bewegt.

Von der verkehrten Methode der Tangentium.

Die 6. Erklärung.

81. Die verkehrte Methode der TANGENTIUM (Methodus Tangentium inversa) ist diejenige, welche zeigt, wie man aus dem gegebenen Subtangente, Tangente, der Normallinie oder Subnormallinie ꝛc. die Gleichung finden kann, welche die Natur der Linie erklärt.

Zusatz.

82. Setzet nämlich die gegebenen Linien ihrem Werthe gleich, worinnen die Differentialgrößen anzutreffen sind, so bekommet ihr die Differentialgleichung für die gesuchte Linie. Wenn ihr nun selbige integriret, so bekommet ihr die gesuchte Gleichung.

Die 33. Aufgabe.

83. **Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangens $=2yy:a$.**

Auflösung.

Weil der Subtangens in einer jeden algebraischen Linie $=ydx:dy$, so ist

$$2y^2:a=ydx:dy$$

$$2y\,dy=aydx$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; y$$

$$2ydy=adx$$

$$y^2=ax$$

Welche Gleichung zeigt, daß die verlangte Linie eine Parabel sey.

Anmerkung.

84. Hätte man gesagt, daß der Subtangens sollte $2x$ seyn, (ich setze aber beständig, wie vorhin, daß x allezeit die Abscisse, y die Semiordinate bedeute); so bekämet ihr $ydx=2xdy$. Wollet ihr nun diese Gleichung zu dem Integriren geschickt machen, so sehet ihr, daß, wenn ihr x durch y exprimiren wollet, ihr y^2 durch eine beständige Größe dividiren müsset, und dannenhero für $2x$ annehmen $2y^2:a$.

Die 34. Aufgabe.

85. **Eine krumme Linie zu finden, deren Subnormallinie beständig von einer Größe ist. Z. E. $=a$.**

Auflösung.

Die Subnormallinie ist $ydy:dx$ (§. 46.). Demnach

$$ydy:dx=a$$

$$ydy=adx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2=ax$$

$$y^2=2ax.$$

Also ist die verlangte Linie eine Parabel, deren Parameter der doppelten Subnormallinie gleich ist.

Die 35. Aufgabe.

86. Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangens die mittlere Proportionallinie ist zwischen x und y.

Auflösung.

Es ist $y\,dx : dy = \sqrt{xy}$

$$y\,dx = dy\sqrt{xy} = x^{1:2}y^{1:2}dy$$

y

$$dx = y^{-1:2}x^{1:2}dy$$

$x^{1:2}$

$$x^{-1:2}dx = y^{-1:2}dy$$

$$2x^{1:2} = 2y^{1:2}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y}$$

$$x = y.$$

Also ist die verlangte Figur ein gleichschenklichter rechtwinklichter Triangel. Ihr könnet aber auch setzen

$$\sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{y}$$

so ist $x + 2\sqrt{ax} + a = y$

$$2\sqrt{ax} = y - x - a$$

$$4ax = y^2 - 2yx + 2xx + 2ax - 2ay + aa$$

$$y^2 - 2yx + x^2 - 2ax - 2ay + aa = 0.$$

Wel-

Welches eine Gleichung an dem Circul ist, worinnen der Ursprung von x und y auf besondere Weise (§. 362. *P. I.*) zu determiniren ist.

Ihr könnet auch setzen, daß $\sqrt{x}-\sqrt{a}=\sqrt{y}$.

Die 36. Aufgabe.

87. Eine krumme Linie zu finden, deren Subnormallinie $=r-x$.

Auflösung.

Es ist $ydy:dx=r-x$,

$$ydy=rdx-xdx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2=rx-\tfrac{1}{2}x^2$$

$$y^2=2rx-xx.$$

Also ist die verlangte Linie ein Circul, dessen Diameter $=2r$.

Die 37. Aufgabe.

88. Eine Linie zu finden, deren Subnormallinie $=\sqrt{ax}$.

Auflösung.

Es ist $ydy:dx=\sqrt{ax}=a^{1:2}x^{1:2}$

$$ydy=a^{1:2}x^{1:2}dx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2=\tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3}$$

$$2$$

$$y^2-\tfrac{4}{3}\sqrt{ax^3}=\tfrac{2}{3}\sqrt{4ax^3}.$$

Also ist das Quadrat der Semiordinate in dieser Linie jederzeit einem parabolischen Raume gleich (§. 13.), und also die quadratrix parabolæ, weil durch ihre Semiordinaten die Parabel quadrirt wird, deren Parameter $4a$.

Die 38 Aufgabe.

89. Eine krumme Linie zu construiren, deren Subtangens einer unveränderlichen Linie gleich ist.

Auflösung.

Es ist $ydx:dy=a$

$$dx=ay^{-1}dy$$

$$\int dx=\int ay^{-1}dy.$$

Wenn ihr $ay^{-1}dy$ (§. 82.) integriren wolltet, so käme heraus $ay^{0}:0=a:0$, das ist eine unendliche große Größe. Und also geht die Integration algebraisch nicht an. Da nun aber bekannt ist (§. 61. *P. II.*), daß die angenommene Eigenschaft der logarithmischen Linie zugehört, in dieser aber die Abscissen x die Logarithmi der Semiordinaten sind (§. 307. *P. I.*); so muß auch $\int ay^{-1}dy(=x)$ der Logarithmus der Semiordinate seyn, und dannenhero könnet ihr jederzeit für die Integrale von $ay^{-1}dy$ oder $ady:y$ den Logarithmum von y oder ly setzen. Es muß aber der Logarithmus in einer logarithmischen Linie genommen werden, deren Subtangens a ist.

Der 1. Zusatz.

90. Da nun die Differentiale eines Logarithmi $=ady:y$, so könnet ihr jetzt auch diejenigen Größen differentiiren, in welchen Logarithmi zu finden sind. Es sey z. E. ly^{n}, so ist die Differentiale $nly^{n-1}ady:y$.

Der 2. Zusatz.

91. Es sey die Differentiale eines Logarithmi $=dy:(1+y)$; so ist der Logarithmus der Zahl $1+y=\int dy:(1+y)$. Nun ist $1:(1+1)=1-y$
$+y^{2}$

$+y^2-y^3+y^4$ u. s. w. wie ihr es findet, wenn ihr in der That dividiret, und daher $dy:(1+y)=dy-ydy+y^2dy-y^3dy+y^4dy$ &c. Derowegen ist $\int dy(1+y)$ oder der Logarithmus von der Zahl $1+y=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c.

Der 3. Zusatz.

92. Weil nun $l=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. so findet ihr (§. 59.) $y=\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1.2.}+\frac{l^3}{1.2.3}+\frac{l^4}{1.2.3.4}+\frac{l^5}{1.2.3.4.5}$ &c.

Der 4. Zusatz.

93. Ihr sehet zugleich (§. 90.), wie die Differentiale der logarithmischen Größen integriret werden, wenn man a für den Subtangentem der logarithmischen Linie annimmt. Es ist z. E. $\int ly^n dy:y=ly^{n+1}:(n+1)a$, $\int lydy\sqrt{(aa+ly^2)}:ay=(aa+ly^2)^{3:2}3a$ u. s. w.

Anmerkung.

94. Wenn man die Differentialgleichung nicht integriren kann, so sucht man dieselbe auf die Quadratur oder Rectification des Circuls, oder Parabel, Hyperbel und Ellipsis zu reduciren, weil diese Linien bekannt sind, und ist zufrieden, wenn man sagen kann, daß die Construction der verlangten Linie von der Quadratur oder Rectification einer von den gemeldeten Linien dependire: wovon ich noch einige Exempel hieher setzen muß. Ihr habt euch aber zu dem Ende alle Elemente der Flächen und Längen in den Kegelschnitten bekannt zu machen, damit ihr um so viel leichter wahrnehmet, auf was für eine Quadratur oder Rectification sich jeder vorkommender Fall reduciren lasse.

Die 39. Aufgabe.

95. **Eine krumme Linie zu construiren, in welcher $dz=qdu$.**

Auflösung.

Es bedeutet q eine Größe, welche aus veränderlichen und unveränderlichen in Gestalt eines Bruchs zusammen gesetzt ist. Beschreibet in unendlichen Fällen, welche unter der gegebenen Gleichung begriffen sind, eine krumme Linie, deren Abscissen $=v$, die Semiordinaten $=aq$ sind; so ist das Element dieser Linie $aqdu$. Wenn ihr nun dieses durch a dividiret, so bekommet ihr qdu. Derowegen richtet auf eben der Axe für die Abscissen u andere Semiordinaten auf, welche $=\int qdu$, das ist, dem Raume gleich sind, welcher zwischen dieser krummen Linie und ihren Coordinaten enthalten sind, wenn man ihn durch eine unveränderliche Größe a dividiret, so bekommet ihr die Linie, deren Differentialgleichung $dz=qdu$.

Der 1. Zusatz.

96. Es sey $ydx=ady$, oder $dx=ady:y$, so sind die Semiordinaten der Linie, von deren Quadratur die Construction dependirt, $aa:y$. Da nun die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist (§. 283. *P. I.*) $aa=zy$: so erkennet ihr daraus die Art der Linie.

Der 2. Zusatz.

Tab. VI. Fig. 53. 97. Wenn in der verlangten Linie der Subtangens $=y\sqrt{(aa+yy)}:a$, so ist $dx=dy\sqrt{(aa+yy)}$

$+yy):a$. Also sind die Semiordinaten der Linie, von deren Quadratur die Construction dependirt, $\sqrt{(aa+yy)}$. Woraus ihr abermal erkennet, daß es eine gleichseitige Hyperbel sey, denn es sey $AC=CB=a$, $CQ=PM=y$, $QM=CP=x$; so ist $AP=x-a$, $BP=a+x$, folglich $AP.PB=x^2-a^2$, und $y^2=x^2-a^2$ (§. 290. P. I.), und daher $x=\sqrt{(y^2+a^2)}=QM$.

Ende
des
dritten Theils.

Der vierte Theil,
von den
Anfangsgründen
der
Exponential-
und
Differentio-Differential-rechnung.

Die I. Erklärung.

I.

Die Exponentialrechnung besteht in dem Differentiiren und Integriren solcher Größen, welche einen veränderlichen Exponenten haben, als x^x, a^x, und Exponentialgrößen genennet werden.

Die I. Aufgabe.

2. Eine Exponentialgröße zu differentiiren.

Auflösung.

Die ganze Kunst kommt darauf an, daß man die Exponentialgrößen auf logarithmische reducirt, und sie (§. 90. *P. III.*) differentiirt. Setzet nämlich

$$x^y = z$$

so ist $ylx = lz$

$lxdy + ydx : x = dz : z$ (§. 90. *P. III.*)

$$z(lxdy + ydx : x) = dz.$$

das ist, $x^y(lxdy + ydx : x) = dz$,

oder $x^y lxdy + yx^{y-1}dx = dz$.

Setzet abermal:

$$v^{x^y} = z$$

so ist $x^y lv = lz$

$$(x^y lxdy + yx^{y-1}dx)lv + x^y dv : v = dz : z$$

$$x(x^y lxdy + yx^{y-1}dx)lv + zx^y dv : v = dz$$

$$v^{x^y}x^y lxlvdy + v^{x^y}yv^{y-1}lvdx + v^{x^y}v^{-1}x^y dv = dz.$$

Auf gleiche Weise verfahret ihr in andern Fällen.

Die 2. Erklärung.

3. Eine Exponentiallinie wird genennet eine krumme Linie, welche durch eine Exponentialgleichung erklärt wird, als wenn $x^x = y$.

Zusatz.

4. Wenn ihr die Exponentialgleichung differentiiret (§. 2.), und den Werth von dx in dem Differentialwerthe des Subtangentis und der Subnormallinie substituiret; so findet ihr, wie in den algebraischen Linien, ihren Subtangentem und ihre Subnormallinie. Es sey z. E.

$x^x = y$, so ist

$$ylxdx + ydx = dy$$

$$dx = dy : (ylx + y)$$

$$ydx : dy = ydy : (ylx + y)dy = 1 : (1 + lx).$$

Für die Subnormallinie ist

$$ydy : dx = (y^2lxdx + y^2dx) : dx = y^2lx + y^2 = y^2(lx + 1).$$

Die 2. Aufgabe.

5. Die Differentiale einer logarithmischen Größe zu integriren.

Auflösung.

Ihr sollet z. E. $xlxdx$ integriren. Setzet

$$x = 1 + y$$

so ist $lx = l(1+y)$

$$dx = dy$$

$$xlxdx = l(1+y)(1+y)\,dy.$$

Nun ist $l(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. Derowegen $l(1+y)(1+y)dy = (1+y)dy(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c.$)$ = (wenn man in der That multiplicirt).

$$ydy - \tfrac{1}{2}y^2dy + \tfrac{1}{3}y^3dy - \tfrac{1}{4}y^4dy + \tfrac{1}{5}y^5dy \text{ \&c.}$$
$$+ y^2dy - \tfrac{1}{2}y^3dy + \tfrac{1}{3}y^4dy - \tfrac{1}{4}y^5dy \text{ \&c.}$$

das ist, $ydy + \frac{1}{2}y^2dy - \frac{1}{6}y^3dy + \frac{1}{12}y^4dy - \frac{1}{20}y^5dy$ &c.

folglich die verlangte Integrale $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{60}y^5 - \frac{1}{120}y^6$ &c. $= \frac{1y^2}{1.2} + \frac{1y^3}{1.2.3} - \frac{1y^4}{2.3.4} + \frac{1y^5}{3.4.5} - \frac{1y^6}{4.5.6}$ &c. in welcher Reihe $y = x - 1$.

Auf gleiche Manier könnet ihr in andern Fällen verfahren.

Die 3. Aufgabe.

6. Eine Exponentialgröße zu integriren.

Auflö-

Auflösung.

Ihr sollet z. E. $(1+y)^{1+y}dy$ integriren. Setzet:

$$\frac{(1+y)^{1+y}=1+v}{}$$

so ist $(1+y)l(1+y)=l(1+v)$

folglich (§. 91. *P. III.*)

$$y+\tfrac{1}{2}y^2-\tfrac{1}{6}y^3+\tfrac{1}{12}y^4-\tfrac{1}{20}y^5 \text{ \&c.} = v - \tfrac{1}{2}v^2+\tfrac{1}{3}v^3-\tfrac{1}{4}v^4+\tfrac{1}{5}v^5 \text{ \&c.}$$

Setzet ferner:

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \text{ \&c.}$$

so ist

$$\begin{aligned} v^2 &= +y^2+2ky^3+k^2y^4+2kmy^5 \text{ \&c.} \\ &\quad +2my^4+2ny^5 \text{ \&c.} \\ v^3 &= +y^3+3ky^4+3k^2y^5 \text{ \&c.} \\ &\quad +3my^5 \\ v^4 &= +y^4+4ky^5 \text{ \&c.} \\ v^5 &= +y^5 \text{ \&c.} \end{aligned}$$

(§. 91. *P. I.*)

Daher

$$\begin{aligned} v &= y+ky^2+my^3+ny^4+py^5 \text{ \&c.} \\ -\tfrac{1}{2}v^2 &= -\tfrac{1}{2}y^2-ky^3-\tfrac{1}{2}k^2y^4-kmy^5 \text{ \&c.} \\ &\quad -my^4-ny^5 \\ +\tfrac{1}{3}v^3 &= +\tfrac{1}{3}y^3+ky^4+k^2y^5 \text{ \&c.} \\ &\quad +my^5 \\ -\tfrac{1}{4}v^4 &= -\tfrac{1}{4}y^4-ky^5 \text{ \&c.} \\ -\tfrac{1}{5}v^5 &= +\tfrac{1}{5}y^5 \text{ \&c.} \\ -y-\tfrac{1}{2}y^2&+\tfrac{1}{6}y^6-\tfrac{1}{12}y^4+\tfrac{1}{20}y^5 \text{ \&c.} = 0. \end{aligned}$$

Man bekommt demnach

$$\frac{1-1=0}{1=1} \qquad \frac{k-1=0}{k=1} \qquad \frac{m-k+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}=0}{m=1-\tfrac{3}{6}=\tfrac{1}{2}}$$

$$\frac{n-\tfrac{1}{2}k^2-m+k-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{12}=0}{n-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{12}=0}$$

$$\overline{n=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{12}=\tfrac{4}{12}=\tfrac{1}{3}.}$$

$p-km$

$$p - km - n + k^2 + m - k + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{20} = 0$$

$$p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - 1 - \tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{20}$$

$$p = \tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{20} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{4}{12} - \tfrac{3}{12} = \tfrac{1}{12}.$$

Demnach ist $(1+y)^{1+y} = 1 + v = 1 + y + y^2 + \tfrac{1}{2}y^3 + \tfrac{1}{3}y^4 + \tfrac{1}{12}y^5$ &c. folglich $(1+y)^{1+y}dy = dy + ydy + y^2dy + \tfrac{1}{2}y^3dy + \tfrac{1}{3}y^4dy + \tfrac{1}{12}y^5dy$ &c. Und daher $\int(1+y)^{1+y}dy = y + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{8}y^4 + \tfrac{1}{15}y^5 + \tfrac{1}{72}y^6$ &c.

Zusatz.

7. Wenn ihr die Differentiale einer Exponentialgröße integriren könnet, so könnet ihr auch die Exponentiallinien quadriren.

Die 3. Erklärung.

8. Differentio-differentiiren heißt so viel, als die Differentiale von einer Differentialgröße finden.

Zusatz.

9. Wenn die Differentiale *dx* ist, so nennet ihre Differentiale, oder die Differentio-Differentiale von *x*, *ddx*; die Differentiale von *ddx* aber *dddx* u. s. w.

Die 4. Aufgabe.

10. Eine jede gegebene Differentialgröße von neuem zu differentiiren.

Auflösung.

Es geschieht nach den Regeln (§. 13. *P. II.* & seqq.), nach welchen die veränderlichen Größen differentiiret werden, nur, daß man eine Differentialgröße meistentheils als eine unveränderliche an-

annimmt, und daher auch die andere Differentiale für nichts hält (§. 4. *P. II.*).

Z. E. Die andere Differentiale von xdx findet ihr $dx^2 + xddx$ (§. 16. *P. II.*); $d(1:dx) = -ddx:dx^2$ (§. 24. *P. II.*); $d(ydy:dx) = (dy^2 + yddy):dx$, wenn ihr dx unveränderlich annehmet, hingegen $= (dy^2dx - ydyddx):dx^2 = dy^2:dx - ydyddx:dx^2$ (§. 24. *P. I.*), wenn ihr dy unveränderlich annehmet; $d\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dyddy:\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ wenn dx unveränderlich ist; hingegen $dxddx:\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, wenn dy unveränderlich ist (§. 20. *P. II.*) u. s. w.

Anmerkung.

11. Wenn die Rechnung auf gewisse Fälle applicirt wird, so ist nicht schwer zu sehen, welche Differentiale ihr für unveränderlich annehmen könnet.

Die 4. Erklärung.

12. Wenn eine krumme Linie AF anfangs die hohle, hernach die erhabene Seite gegen die Axe AE kehret, und immer in einem mit der Axe fortgeht, so heißt der Punct E, wo die Wendung geschieht, der Wendungspunct hingegen der Wiederkehrpunct, wenn sie wieder zurück gegen die Axe kehrt. In dem Lateinischen nennet man diese Puncte Puncta flexus contrarii & regressus. Tab. X. Fig. 86.

Der 1. Zusatz.

13. Wenn die krumme Linie einen Wendungspunct hat, so ist klar, daß die Linie AT zunimmt mit der Absciße AP, bis diese in E kommt, denn so bald sich die Linie wendet, so nimmt die Linie AT wieder ab, und die Absciße nimmt, wie vorhin, zu. Derowegen könnet ihr AL als die größte Linie von ihrer Art ansehen.

Der

Der 2. Zusatz.

14. Hingegen, wenn die krumme Linie einen Wiederkehrungspunct hat, so wächst anfangs die Linie AT zugleich mit der Abscisse bis in L: nach diesem, wenn die Linie sich wendet, so nimmt die Linie AT zu, hingegen die Abscissen gehen wieder zurück und nehmen ab, und dannenhero muß in diesem Falle die Linie AE die größte von ihrer Art werden.

Der 3. Zusatz.

Tab. X. Fig. 86. 15. Da nun $AL = (ydx : dy) - x$ (§. 36. *P. II.*), so ist, wenn ihr dx für unveränderlich annehmet (§. 10.),

$$\frac{(dy^2dx - ydxddy) : dy^2 - dx = 0}{dy^2dx - ydxddy - dy^2dx = 0}$$

$$\frac{-yddy = 0}{y}$$

$ddy = 0$, oder $ddy = \infty$ (§. 64. *P. II.*)

Der 4. Zusatz.

Tab. X. Fig. 87. 88. 16. Wenn die Semiordinaten BM aus einem Puncte B gezogen sind, so ziehet Bm und BM unendlich nahe, und Bt auf Bm perpendicular: dann ist klar, daß an der hohlen Seite Bt größer ist als BO, hingegen an der erhabenen kleiner wird. Derowegen ist in dem Wendungspuncte $tO = 0$. Beschreibet nun aus dem Mittelpuncte B den Bogen TH und MR, so sind die Triangel mMR, MBT und THO einander ähnlich (§. 182. *Geom.*), weil nämlich bey R, H (§. 48. *P. II.*) und B rechte Winkel sind, und über dieses HOT = MTB, und MmR = MTB, indem beyde von MTB nur um

einen

einen unendlichen kleinen Winkel HBT und MBm unterschieden sind (§. 101. *Geom.*), und die Ausschnitte des Circuls sind, weil die Winkel MBm und HBT mit HBM einen rechten Winkel machen, auch einander ähnlich. Demnach ist (§. 183. *Geom.*)

$$mR : MR = BM : BT$$
$$dy : dx = y : ydx:dy$$
$$BM : BT = MR : TH$$
$$y : \frac{ydx}{dy} = dx : \frac{dx^2}{dy}$$
$$BM : BT = TH : HO;$$

daher
$$MR : TH = TH : HO$$
$$dx : \frac{xd^2}{dy} = \frac{dx^2}{dy} : \frac{dx^3}{dy^2}.$$

Also ist die Differentiale von BT oder tH, wenn ihr dx für unveränderlich annehmet, $=(dxdy^2 - ydxddy):dy^2$ (§. 10.), dannenhero $OH + tH = Ot$ $=(dx^3 + dxdy^2 - ydxddy):dy^2$. Da nun die Linie tO in dem Wendungspuncte nichts wird, so ist

$$\frac{(dx^3 + dxdy^2 - ydxddy):dy^2 = 0}{dx^2 + dy^2 - yddy = 0, \text{ oder } = \infty.}$$

Die 5. Aufgabe.

17. Den Wendungspunct in einer Linie zu finden, wo die Semiordinaten mit einander parallel sind.

Auflösung.

Weil in diesem Falle $ddy=0$, so suchet diesen Tab. X.
Werth aus der gegebenen Gleichung für die krum- Fig. 86.
me Linie durch x, und ihr werdet daraus den Werth von AE, das ist, der Abscisse finden, wel-

cher die aus dem Wendungspuncte F gezogene Semiordinate EF, zugehört.

Der 1. Zusatz.

18. Es sey $axx = xxy + aay$

$$\frac{ax^2}{x^2 + a^2} = y$$

$$\frac{2a^3xdx}{(x^2+a^2)^2} = dy$$

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet, so ist

$$(2a^3dx^2(xx+aa)^2 - 8a^3x^4dx^2 + 8a^5x^2dx^2):(x^2+a^2)^4 = ddy = 0.$$

Und wenn ihr mit $(xx+aa)dx^2:(x^2+a^2)^4$ dividiret,

$$2a^3x^2 + 2a^5 - 8a^3x^2 = 0$$

das ist $2a^5 - 6a^3x^2 = 0$

folglich $a^2 - 3x^2 = 0$

und $\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2} = x.$

Setzet ihr diesen Werth in die Stelle von x in der Gleichung;

so ist $y = axx:(xx+aa)$

$$y = \tfrac{1}{3}a^3:(\tfrac{1}{3}aa + aa) = \tfrac{1}{3}a^3:(\tfrac{4}{3}aa) = a^3:4aa = \tfrac{1}{4}a.$$

Solchergestalt könnet ihr den Wendungspunct finden, auch wenn die krumme Linie nicht beschrieben ist.

Der

Der 2. Zusatz.

19. Es sey

$$y-a=(x-a)^{3:5}$$

so ist $dy=\frac{3}{5}(x-a)^{-2:5}dx$

$$ddy=-\tfrac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2=0.$$

Wenn nämlich dx unveränderlich angenommen wird: folglich

$$-\tfrac{6}{25}(x-a)^{-7:5}=0$$

$$-6=0.$$

Weil ihr keinen Werth von x findet, so setzet

$$-\tfrac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2=\infty$$

das ist $-6dx^2:25\sqrt[5]{(x-a)^7}=\infty$

folglich $25\sqrt[5]{(x-a)^7}=0$

$$x-a=0$$

$$x=a.$$

Der 3. Zusatz.

20. In der Parabel ist

$$x=y^2$$

$$x^{1:2}=y$$

$$\tfrac{1}{2}x^{-1:2}dx=dy$$

$$-\tfrac{1}{4}x^{-3:2}dx^2=ddy=0$$

$$\frac{1}{4\sqrt{x^3}}=0$$

$$1=0.$$

Setzet ferner:

$$\frac{-dx^2}{4\sqrt{x^3}} = \infty$$

so ist $\sqrt{x^3} = 0$.

Da ihr nun keinen Werth von x findet, ihr möget $ddy = 0$ oder $ddy = \infty$ setzen; so hat die Parabel keinen Wendungspunct.

Die 6. Aufgabe.

21. **Den Wendungspunct in einer krummen Linie zu finden, deren Semiordinaten alle aus einem Puncte gezogen werden.**

Auflösung.

Weil in diesem Falle $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$ (§. 16.); so dürfet ihr nur aus der gegebenen Gleichung für die Linie den Werth von dy durch dx exprimiren, und ihr werdet, wie vorhin, den Werth von x in unveränderlichen Größen finden können.

Zusatz.

Tab. IX. Fig. 79. 22. Es sey in der Conchoide des Nicomedis $BA = a$, $BC = b$, $Cq = z$, $CM = y$, so ist (§. 296. *P. I.*).

$$z + a = y$$

$$dz = dy:$$

Ferner ist $Bq = \sqrt{(zz - bb)}$, und weil bey t und B rechte Winkel sind, die Winkel S und q aber, deren Unterscheid qCS unendlich klein ist, einander gleich sind (§. 183. *Geom.*).

$$Bq : BC = St : tq$$

$$\sqrt{(zz - bb)} : b = dz : bdz : \sqrt{(zz - bb)}$$

und

und, weil die Ausschnitte Cqt und CMr ähnlich sind,

$$Cq : qt = CM : Mr$$
$$z : bdz = z+a : Mr$$
$$\overline{\qquad\quad}$$
$$\sqrt{(zz-bb)}$$

demnach ist $Mr = (z+a)bdz : z\sqrt{(zz-bb)} = dx$, folglich

$$(z+a)bdz = zdx\sqrt{(zz-bb)}$$

$$dz = dy = zdx\sqrt{(zz-bb)} : (bz+ab).$$

Wenn man demnach dx für unveränderlich annimmt, so ist $ddy = (bz+ab)\sqrt{(z^2-b^2)}dzdx : (bz+ab)^2 + (bz^3+abz^2)dzdx : (bz+aa)^2\sqrt{(z^2-b^2)} - bzdzdx\sqrt{(z^2-b^2)} : (bz+ab)^2 = abdzdx\sqrt{(z^2-b^2)} : (bz+ab)^2 + (bz^3+abz^2)dzdx : (bz+ab)^2\sqrt{(z^2-b^2)} = (2abz^2 - ab^3+bz^3)dzdx : (ab+bz)^2\sqrt{(z^2-b^2} =$ (wenn man für dz seinen Werth setzet) $(2abz^3-ab^3z+bz^4)dx^2 : (ab+bz)^3$.

Setzet nun in der Gleichung $yddy = dx^2+dy^2$ (§. 16.) die gehörigen Werthe an ihre Stelle, so habt ihr

$$(ab+bz).(2az^3-ab^2z+z^4)dx^2 : (ab+bz)^3$$
$$= lx^2 + (z^4-b^2z^2)dx^2 : (ab+bz)^2$$

$$2az^3-ab^2z+z^4 = (ab+bz)^2+z^4-b^2z^2$$
$$= a^2b^2+2ab^2z+z^4$$

$$2az^3-3ab^2z-a^2b^2 = 0$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \quad 2a$$
$$z^3-\tfrac{3}{2}b^2z-\tfrac{1}{2}ab^2 = 0$$

Suchet endlich aus dieser Gleichung die Wurzel (§. 366. 372. *P. I.*). Wenn ihr diese mit a vermehret, so habt ihr die verlangte Linie $CM(=z+a)$, welche den Wendungspunct determinirt.

Die 5. Erklärung.

Tab. X. Fig. 89. 23. Wenn eine krumme Linie BDF mit einem Faden überlegt ist welcher immer gleich viel gedehnt wird, und die gerade Linie BA anfangs die krumme in B berührt, hernach aber immer nach und nach von der krummen abgezogen wird, so beschreibt der äußere Punct A eine andere krumme Linie AHR, und nennet man die krumme Linie BDF die Evolute der Linie AHR, die Theile des Fadens DH, RF &c. aber die RADIOS der Evolute.

Der 1. Zusatz.

24. Wenn der Punct A in B fällt, und AB =0, so ist DH oder der Radius der Evolute dem Bogen BD, sonst aber der Summe zwischen dem Bogen DB und der Linie AB gleich.

Der 2. Zusatz.

Tab. X. Fig. 89. 25. Ihr könnet jeden unendlich kleinen Bogen der Linie AHR als einen Circulbogen ansehen, welcher mit dem Radio DH, oder FR &c. aus dem Mittelpuncte D oder F &c. beschrieben worden ist, und demnach stehen die Radii der Evolute alle auf der Linie AHR perpendicular (§. 74. *P. III.*).

Der 3. Zusatz.

26. Weil nur so lange ein Circulbogen beschrieben wird, als der Radius der Evolute DH mit einem unendlich kleinen Bogen in der Evolute BDF eine gerade Linie macht; so müssen alle Radii die Evolute BDF berühren (§. 28. *P. II.*).

Die 7. Aufgabe.

27. Die Länge des Radii der Evolute MC zu finden, wenn die Semiordinaten PM und pm der Linie AMD auf der Axe AB perpendicular stehen. Tab. X. Fig. 90.

Auflösung.

Es sey die Semiordinate pm der andern PM unendlich nahe, imgleichen der Radius Cm dem Radio CM. Ziehet CE mit der Axe AB parallel, bis sie die verlängerte Semiordinate in E erreicht. Weil bey R und E rechte Winkel sind, und RMm = EMC, indem EMG und CMm (§. 25.) rechte Winkel seyn, so ist (§. 183. *Geom.*)

$$MR : Mm = ME : MC$$

$$dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = z : \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx.}$$

Da nun der Mittelpunct in C ist, woraus der kleine Bogen Mm mit dem Radio CM beschrieben wird, und dieser unverändert bleibt, indem ME und mR zunimmt; so muß die Differentiale des Radii CM, in Ansehung der Differentiale mR der Linie ME, nichts seyn. Nun ist die Differentiale des Radii CM, wenn ihr dx für unveränderlich (das ist, in allen Puncten der Linie von gleicher Größe annehmet), $dzdx\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx^2 + zdyddydx : dx^2\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy) : dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Derowegen habt ihr

$$(dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy) : dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 0$$

$$dzdx^2 + dzdy^2 = -zdyddy$$

--- $dyddy$

$$(dzdx^2 + dzdy^2) : -dyddy = z$$

das ist, weil $dz = dy$,

$$(dx^2 + dy^2) : -ddy = z.$$

Wenn ihr nun die Werthe von dy^2 und $-ddy$ durch x aus der Gleichung für die krumme Linie exprimiret, so werdet ihr den Werth von z durch x finden.

Der 1. Zusatz.

28. In der Apollonischen Parabel ist

$$ax = y^2$$

daher $adx = 2ydy$

$$adx : 2y = dy$$

$$a^2dx^2 : 4y^2 = dy^2$$

das ist, $adx^2 : 4x = dy^2$.

Und wenn ihr dx für unveränderlich annehmet,

$$-adx^2 : 4x\sqrt{ax} = ddy.$$

Tab. X. Fig. 90. Folglich $(dx^2 + dy^2) : -ddy = (4xdx^2 + adx^2)x\sqrt{ax} : axdx^2 = (a + 4x)\sqrt{ax} : a = \sqrt{ax} + 4x\sqrt{ax} : a = z = y + 4xy : a = PM + PE$. Es ist aber $PM = y$, und daher $PE = 4xy : a$.

Der 2. Zusatz.

29. Es sey für unendliche Parabeln

$$y^m = x$$

so ist $my^{m-1}dy = dx$.

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet, so ist

$$(mm - m)y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$$

$$(mm - m)y^{m-2}dy^2 = -my^{m-1}ddy$$

$$(m - 1)y^{-1}dy^2 = -ddy,$$

das

das ist, $(m-1)dy^2:y=-ddy$. Demnach ist $(dx^2+dy^2):-ddy=(ydx^2+ydy^2):(m-1)dy^2$.

Nun ist $dx^2=m^2y^{2m-2}dy^2$. Derowegen, wenn ihr diesen Werth in die Stelle von dx^2 setzet, so bekommet ihr

$$(m^2y^{2m-1}dy^2+ydy^2):(m-1)dy^2=z$$

$$(m^2y^{2m-1}+y):(m-1)=z.$$

Setzet z. E. $m=2$, so ist $4x\sqrt{x}+\sqrt{x}=z$, welche Gleichung mit der vorigen übereinkommt, wenn $a=1$.

Anmerkung.

30. Wenn euch das Differentiiren beschwerlich fallen will; so brauchet den Vortheil, wodurch wir oben (§. 24. *P. II.* seqq.) die Regeln zu differentiiren zu finden angewiesen haben.

ENDE
des
vierten Theils.

Anhang zu der Algebra, worinnen ihr Nutzen in verschiedenen Wissenschaften durch Exempel gezeigt wird.

Die 1. Erklärung.

1.

Die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein Körper bewegt, ist die Verhältniß des Raums zu der Zeit.

Zusatz.

2. Es sey der Raum $=r$, die Zeit $=t$, die Geschwindigkeit $=c$; so ist die Geschwindigkeit $=r:t$ und $r=tc$.

Die 2. Erklärung.

3. Die Materie eines Körpers ist diejenige, welche mit ihm wiegt und bewegt wird.

Zusatz.

4. Daher ist sie seiner Schwere jederzeit proportional.

Die 3. Erklärung.

5. Die Größe der Bewegung erwächst, wenn die Materie des Körpers durch die Geschwindigkeit der Bewegung multiplicirt wird.

Zusatz.

6. Es sey die Geschwindigkeit des Körpers $=c$, seine Materie $=m$; so ist die Größe der Bewegung $=mc$.

Die 1. Aufgabe.

7. Die Lehrsätze zu finden, nach welchen die Bewegungen zweener Körper, welche sich die ganze Zeit ihrer Bewegung mit einerley Geschwindigkeit bewegen, verglichen werden.

Auflösung.

Es sey der eine Körper A, seine Geschwindigkeit C, seine Materie M, die Zeit seiner Bewegung T, der Raum, welchen er durchlaufen hat R, die Größe der Bewegung Q. Der andere Körper a, seine Geschwindigkeit c, seine Materie m, die Zeit seiner Bewegung t, der Raum, welchen er durchlaufen hat r, die Größe seiner Bewegung q. So ist $C=R:T$ und $c=r:t$ (§. 2.). $Q=CM$, und $q=cm$ (§. 6.). Solchergestalt habt ihr

I. $C:c=\frac{R}{T}:\frac{r}{t}$

II. $Q:q=CM:cm$

Setzet $C=c$, so ist $R:T=r:t$. Folglich

III. $R:r=T:t$.

Setzet $Q=q$, so ist $CM=cm$. Folglich

IV. $C:c=m:M$.

Setzet ferner $T=t$, so ist

V. $R=r$.

Setzet $C=c$, so ist

VI. $M=m$.

Wiederum, weil $C:c=(R:T):(r:t)$, so ist $CTr=ctR$, folglich:

VII. $T:t=cR:Cr$.

VIII. $R:r=TC:tc$.

Setzet $T=t$, so ist $Cr=cR$. Folglich

IX. $C:c=R:r$.

Setzet $R=r$, so ist $CT=ct$. Folglich

X. $C:c=t:T$.

Weil $Q:q=CM:cm$, so ist $Qcm=qCM$, folglich

XI. $C:c=Qm:qM$.

XII. $M:m=Qc:qC$.

Setzet $C=c$, so ist $Qm=qm$. Folglich

XIII. $Q:q=C:c$.

Endlich weil

$$C:c=(R:T):(r:t)$$
$$Q:q=CM:cm$$

so ist
$$\frac{CQ:cq=tRCM:TrcM}{\dfrac{CQTrcm=cqtRCM}{QTrm=qtRM,}\;Cc}$$

dannenhero ist

XIV. $Q:q=tRM:Trm$.

XV. $T:t=qRM:Qrm$.

XVI. $R:r=QTm:qtM$.

XVII. $M:m=QTr:qtR$.

Anmerkung.

8. Es ist nicht nöthig zu erinnern, wie die gefundenen Lehrsätze ausgesprochen werden, weil solches denen zur Gnüge bekannt seyn muß, welche das Vorhergehende ver-

standen haben. Aber wohl ist nöthig, daß ich ermahne, man solle sich diese Lehrsätze wohl bekannt machen, weil man sie in Auflösung anderer Aufgaben gar öfters vonnöthen hat. Merket aber zugleich, wie man so viele Lehrsätze durch die Algebra gleichsam spielend heraus bringen kann, welche sonst durch viele Umwege zu erweisen, und noch schwerer zu erfinden, wären.

Die 2. Aufgabe.

9. Die Gesetze zu finden, nach welchen die schweren Körper in einem Raume, wo ihnen kein Widerstand geschieht, herunter fallen.

Auflösung.

I. Es ist aus der Erfahrung klar, daß, wenn ein schwerer Körper herunter fällt, seine Bewegung um so viel geschwinder wird, je länger er fällt. Woraus denn folgt, daß die Schwere dem Körper nach und nach einen neuen Druck geben muß, da die Würkung des ersten noch nicht vergangen, indem kein Widerstand vorhanden ist. Da nun in den Höhen, in welchen wir es versuchen können, die Schwere der Körper einerley gefunden wird; so können wir annehmen, daß die Schwere in jedem Augenblicke dem Körper einen gleichkräftigen Druck gebe. Es sey also der Augenblick t, die Geschwindigkeit, welche der Körper in einem erlangt c; so ist nach Verfließung $2t$ die Geschwindigkeit $2c$, nach Verfließung $3t$ ist sie $3c$ u. s. w. Nun verhalten sich die Räume, welche die Körper durchlaufen, wie die Producte aus den Zeiten in die Geschwindigkeiten (§. 2. VIII.). Daher ist der Raum, durch welchen der Körper in dem ersten Augenblicke gefallen ist, tc; zu Ende des andern Augenblicks ist sein Raum, welchen er

durch-

durchgelaufen hat 4*tc*; zu Ende des dritten 9*tc*; zu Ende des vierten 16*tc*; zu Ende des fünften 25*tc*; &c. Demnach verhalten sich die Räume gegen einander wie 1*tc*; 4*tc*; 9*tc*; 16*tc*; 25*tc* &c. das ist, wie 1; 4; 9; 16; 25 &c. oder die Quadrate der Zeiten.

II. Ziehet nun die Höhe, durch welche der Körper in dem ersten Augenblicke gefallen ist, von der Höhe ab, durch welche er in zween gefallen ist; so bleibt für den andern Augenblick 3 übrig, eben so findet ihr für den dritten 5, für den vierten 7, für den fünften 9 &c. Solchergestalt wird die Bewegung der schweren Körper nach den ungeraden Zahlen geschwinder gemacht.

III. Da nun $R:r=T^2:t^2$, so ist $\sqrt{R}:\sqrt{r}=T:t$. Ihr könnet also die Zeiten durch die Wurzeln des Raums andeuten.

IV. Wenn ihr demnach in einer Parabel die Abscissen für R annehmet, so sind die Semiordinaten $\sqrt{R}$.

V. Wiederum, weil $R:r=C^2:c^2$; so ist $\sqrt{R}:\sqrt{r}=C:c$. Ihr könnet also die Geschwindigkeit durch die Wurzeln des Raums ausdrücken.

VI. Dannenhero wenn die Abscissen in einer Parabel R sind, so sind die Semiordinaten $\sqrt{R}$, und also $=C$.

Zusatz.

Tab. XI. Fig. 91.

10. Wenn in dem Triangel AEI die Abscissen AB, AC &c. $=T$, die Semiordinaten BF, CG &c. $=C$ angenommen werden; so sind die Triangel $=\frac{1}{2}TC=R$. Wenn ihr nun setzet, daß alle Ordinaten BF, CG, DH, EI einander gleich sind: so werden die Triangel Rectangula, deren Inhalt $=TC$. Da nun TC den Raum vorstellet, welchen

chen der Körper in der Zeit T mit der Geschwindigkeit C durchlaufen würde, welche er zu Ende der Zeit hat, wenn er sie gleich anfangs hätte, und stäts dieselbe unverändert behielte; so ist klar, daß dieser Raum sich zu jenem verhält, wie TC zu $\frac{1}{2}$TC, das ist, wie 1 zu $\frac{1}{2}$, oder wie 2 zu 1.

Die 3. Aufgabe.

11. Aus der gegebenen Zeit, in welcher ein Körper durch eine gewisse Höhe gefallen ist, zu finden, wie er in jedem Theile derselben Zeit gefallen ist.

Auflösung.

Es sey der erste Theil der Zeit 1, die Zahl der Theile m, der Raum in dem ersten Theile x; so ist der Raum in dem letzten $2mx-2x+x$ (§. 9. & 69. *Arithm.*) $=2mx-x$, und die Summe in allen Theilen der Zeit m^2x (§. 113. *P. I. Alg.*). Setzet nun den ganzen Raum a,

so ist $m^2x=a$

$x=a:m^2$.

Es sey z. E. $a=125$, $m=5$ Secunden, so ist $x=125:25=5$. Also ist der Körper in der ersten Secunde 5, in der andern 15, in der dritten 25, in der vierten 35, in der fünften 45' gefallen.

Die 4. Aufgabe.

12. Es wird eine Kugel aus C nach der Linie DC wider die Wand AB geworfen, man soll den Winkel EDG finden, welchen die Linie ED, nach welcher sie zurück prallet, mit AB macht. Wir wollen CDF den Einfallswinkel, EDG aber den Reflexionswinkel nennen. Tab. XI. Fig. 92.

Auflö-

Auflösung.

Lasset aus C und E die Perpendicularlinien CF und EG fallen. Es sey $CF=a$, $EG=b$, $FG=c$, $DF=x$; so ist $DG=c-x$, $CD^2=aa+xx$, $DE^2=bb+cc-2cx+xx$. Da nun die Natur immer den kürzesten Weg geht, so muß die Kugel in D dergestalt zurück prallen, daß sie bis E den kürzesten Weg nimmt, welchen sie aus C durch das Zurückprallen von der Fläche AB nehmen kann. Und demnach ist CD+DE die kleinste Größe von ihrer Art. Bildet euch demnach eine krumme Linie ein, deren Gleichung

$$\sqrt{(aa+xx)}+\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}=y$$

so ist $xdx:\sqrt{(aa+xx)}+(xdx-cdx):\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}=dy=0$ (§. 20. *P. II.*)

$$x\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}+(x-c)\sqrt{(aa+xx)}=0$$

$$x\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}=(c-x)\sqrt{(aa+xx)}$$

das ist, $FD.ED=DG.CD$.

Folglich $FD:CD=DG:DE$, und daher der Reflexionswinkel EDG dem Einfallswinkel CDF gleich (§. 52. 182. *Geom.*)

Zusatz.

13. Hieraus sehet ihr zugleich, daß, wenn ein Stral des Lichts CD auf einen Spiegel fällt, er dergestalt in E reflectirt wird, daß der Reflexionswinkel EDG dem Einfallswinkel CDF gleich ist.

Die 5. Aufgabe.

Tab XI. Fig. 93.

14. Aus der gegebenen Weite eines stralenden Punctes A von dem Mittelpuncte B eines sphärischen Spiegels DEF den Punct zu finden,

finden, wo der reflectirte Stral DC mit der Axe vereinigt wird.

Auflösung.

Es sey AB$=a$, BD$=$BE$=r$, BC$=x$, so ist CE$=r-x$. Weil das Auge, welches den stralenden Punct A in dem Spiegel sieht, in der Axe AE steht, so muß der Punct D, von welchem der Stral, welcher in das Auge fällt, reflectirt wird, der Axe AE überaus nahe seyn. Und dannenhero ist DC$=$CE$=r-x$, die Winkel m, n, p und q sind unendlich klein, und daher ist DB:AB$=m:n$, und DC:CB$=q:p$, folglich auch DB$+$AB:AB $=m+n:n$. Da nun $q=m+n$ (§. 101. *Geom.*), und $p=n$ (§. 13.); so ist DB$+$AB:AB$=q:p$. Derowegen ist (§. 28. *Arithm.*).

DE$+$AB:AB$=$DC:BC

das ist, AE:AB$=$EC:BC

$$a+r:a=r-x:x$$

$$ax+rx=ar-ax$$

$$2ax+rx=ar$$

$$x=ar:(r+2a)$$

$r-x=r-ar:(r+2a)=(r^2+ar):(r+2a)$, das ist, EC$=$AE.BE:(BE$+$2AB), oder, wenn ihr AE$=r+a=d$ setzet, $=dr:(2d-r)$.

Der 1. Zusatz.

15. Wenn d größer ist als r, so ist auch $2d:(2d-r)$ größer als 1 (§. 78. *Arithm.*): und daher $\frac{1}{2}r.2d:(2d-r)=dr:(2d-r)$ größer als $\frac{1}{2}r$, das ist, wenn der stralende Punct A vor dem Hohlspiegel weiter weg ist, als der Semidiameter des Spiegels BE austrägt; so ist die Weite des

Bildes

Bildes EC größer als der vierte Theil des Diameters.

Der 2. Zusatz.

16. Wenn d größer ist als r, so ist auch $2d-r$ größer als d, und daher $d:(2d-r)$ weniger als 1 (§. 78. *Arithm.*), folglich $dr:(2d-r)$ weniger als r, das ist, die Weite des Bildes von dem Hohlspiegel ist geringer als der halbe Diameter.

Der 3. Zusatz.

17. Wenn $a=r$, so ist $dr:(2d-r)=rr:(2r-r)=r$, das ist, wenn der stralende Punct um den halben Diameter des Spiegels von ihm weg ist, oder in seinem Mittelpuncte steht, so wird auch sein Bild daselbst gesehen.

Der 4. Zusatz.

18. Wenn $d=\frac{1}{2}r$, so ist $2d=r$ und $rd:(2d-r=dr:o$, das ist, die Weite des Bildes von dem Hohlspiegel wird unendlich groß, weil der Nenner, in Ansehung des Zählers, zu nichts wird. das ist, die Stralen werden mit der Axe parallel, denn in diesem Falle können sie niemals mit ihr zusammen kommen.

Der 5. Zusatz.

19. Wenn d kleiner ist als r, und $2d$ größer als r (oder d größer als $\frac{1}{2}r$); so ist $2d:(2d-r)$ größer als 1. Denn setzet; $2d=r+m$, so ist $2d-r=m$, und daher $2d:(2d-r)=1+r:m$. Und demnach $\frac{1}{2}r.2d:(2d-r)$ größer als $\frac{1}{2}r$. Derowegen wird das Bild ausser dem Hohlspiegel gesehen, wenn die Sache zwischen dem Mittelpuncte und dem Brennpuncte liegt, welcher (§. 21.) um $\frac{1}{2}r$ von dem Spiegel weg ist.

Der

Der 6. Zusatz.

20. Wenn d kleiner ist als $\frac{1}{2}r$, so hat der Nenner $2d-r$ das Zeichen $-$. Denn, setzet $2d=r-m$, so ist $2d-r=-m$. Und also hat der ganze Bruch $dr:(2d-r)$ das Zeichen $-$. Derowegen muß der Ort des Bildes hinter dem Hohlspiegel seyn, wenn die Sache zwischen dem Brennpuncte und dem Spiegel liegt.

Der 7. Zusatz.

21. Wenn d unendlich groß wird, das ist, wenn die Stralen mit der Axe parallel einfallen, so ist r, in Ansehung $2d$, für nichts zu halten, und demnach ist $dr:(2d-r)=dr:2d=\frac{1}{2}r$.

Der 8. Zusatz.

22. Wenn der Spiegel erhaben ist, so ist $d=a-r$, und daher bekommet ihr anstatt $(rr+ar):(2a+r)$ die Linie $EC=(ar-rr):(2a-r)=dr:(2d+r)$. Denn, weil $2a-2r=2d$, so ist $2a-r=2d+r$. Weil nun hier d allezeit größer ist als r (denn sonst müßte die Sache innerhalb dem Spiegel stehen), und $d:(2d+r)$ weniger als 1; so ist auch $dr:(2d+r)$ weniger als r. Derowegen wird das Bild zwischen dem Mittelpuncte des Spiegels und seiner Fläche gesehen, die Sache mag so weit weg seyn als sie will.

Der 9. Zusatz.

23. Setzet d unendlich groß, so ist r, in Ansehung $2d$, unendlich klein, und dannenhero $dr:(2d+r)=dr:2d=\frac{1}{2}r$. Derowegen wird das Bild niemals weiter hinter einem erhabenen Spiegel gesehen, als den vierten Theil des Diameters, wenn es gleich unendlich weit weg steht.

Anmerkung.

24. Es ist nicht nöthig zu erinnern, daß, wenn d und r durch Zahlen gegeben werden, auch die Weite des Bildes von der Spiegelfläche in Zahlen herauskomme, und ihr auch daher die Verhältniß der Weite zu dem Diameter des Spiegels finden könnet.

Der 10. Zusatz.

25. Wenn r unendlich groß wird, so ist der Spiegel platt, und alsdenn ist $2d$, in Ansehung r, unendlich klein. Derowegen wird in diesem Falle $dr:(2d \mp r) = dr:r = d$, das ist, in einem platten Spiegel ist das Bild so weit hinter ihm, als die Sache vor ihm.

Der 11. Zusatz.

26. Setzet die Weite des stralenden Punctes in einem Hohlspiegel werde nd, so ist die Weite des Bildes $ndr:(2nd-r)$. Derowegen, wenn die Weiten des stralenden Punctes von dem Hohlspiegel sich gegen einander verhalten wie d zu nd, so verhalten sich die Weiten des Bildes von demselben wie $dr:(2d-r)$ zu $ndr:(2nd-r)$, das ist, wie $r:(2d-r)$ zu $n:(2nd-r)$, oder wie $2nd-r$ zu $2nd-nr$. Wenn nun n eine ganze Zahl, und d größer als r ist; so ist $2nd-rn$ kleiner als $2nd-r$. Derowegen, wenn der stralende Punct ausser dem Mittelpuncte des Spiegels ist, so geht das Bild näher zu dem Spiegel, wenn der stralende Punct weiter davon weg geht. Hingegen, wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $2nd-rn$ größer als $2nd-r$. Derowegen, wenn der stralende Punct vom Hohlspiegel weiter weg ist, als der Mittelpunct desselben, so geht das Bild von dem Spiegel weg, wenn der stralende Punct sich demselben nähert.

Der 12. Zusatz.

27. Wenn d kleiner ist als $\frac{1}{2}r$, und nd gleichfals kleiner als $\frac{1}{2}r$, so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem Spiegel wie $r-2nd$ zu $rn-2nd$. Wenn nun n eine ganze Zahl ist, so ist $rn-2nd$ größer als $r-nd$, das ist, wenn der stralende Punct von dem Spiegel weg geht, so geht auch das Bild davon weg. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $r-2nd$ größer als $rn-2nd$, das ist, wenn der stralende Punct dem Spiegel näher kommt, so kommt ihm auch das Bild näher.

Der 13. Zusatz.

28. Es werde gleichfalls bey einem erhabenen Spiegel die Weite des stralenden Punctes nd, so wird die Weite des Bildes von dem Spiegel $ndr:(2nd+r)$, das ist, wenn die Weiten des stralenden Punctes sich verhalten wie d zu nd; so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem erhabenen Spiegel wie $dr:(2d+r)$ zu $ndr:(2nd+r)$, das ist, wie $1:(2d+r)$ zu $n:(2nd+r)$, oder wie $2nd+r$ zu $2nd+nr$. Wenn nun n eine ganze Zahl ist, so ist $2nd+nr$ größer als $2nd+r$. Derowegen, wenn der stralende Punct von dem Spiegel weg geht, so geht auch das Bild zurück. Hingegen, wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $2nd+nr$ kleiner als $2nd+r$. Derowegen, wenn der stralende Punct dem Spiegel näher kommt, so kommt ihm auch das Bild näher.

Die 6. Aufgabe.

29. **Das Gesetz der Natur zu finden, nach welchem die Stralen des Lichts gebrochen werden, wenn sie aus einem durchsichtigen Körper in einen andern dichtern fahren.**

Auflösung.

Tab. XI. Fig. 94. Es werde der Stral AB in B gebrochen, und fahre in G. Setzet die Geschwindigkeit, mit welcher sich der ungebrochene Stral AB bewegt, verhalte sich zu der Geschwindigkeit des gebrochenen BG wie n zu m. Derowegen ist die Zeit, in welcher die Linie AB durchlaufen wird, zu der Zeit, in welcher das Licht durch die Linie BG kommt, wie nBA zu mBG (§.7.). Lasset nun von A und G die Perpendicularlinien AD und GC fallen, und es sey AD$=a$, CG$=b$, CD$=c$, CB$=x$, so ist BD$=c-x$, folglich BG$=\sqrt{(xx+bb)}$, AB$=\sqrt{(aa+cc-2cx+xx)}$ und nBA$+m$GB$=n\sqrt{(aa+cc-2cx+xx)}+m\sqrt{(xx+bb)}$. Weil nun das Licht aus A in G in der geschwindesten Zeit kommen muß, indem die Natur immer den kürzesten Weg geht; so ist $n\sqrt{(aa+cc-2cx+xx)}+m\sqrt{(xx+bb)}$ die kürzeste Zeit, in welcher das Licht durch die Refraction aus A in G gelangen kann. Bildet euch demnach eine krumme Linie ein, in welcher $n\sqrt{(aa+cc-2cx+xx)}+m\sqrt{(xx+bb)}=y$, so ist (§. 20. P.II.)

$$n(xdx-cdx):\sqrt{(aa+cc-2cx+x^2)}+mxdx:\sqrt{(x^2+b^2)}=dy=0.$$

$$mx:\sqrt{(x^2+b^2)}=n(c-x):\sqrt{(aa+cc-2cx+x^2)}$$

das ist, mCB : BG$=n$BD : AB

mCB.AB$=n$BD.BG.

Setzet BG$=$AB, so ist

mCB$=n$BD:

folglich $m:n=$BD : CB.

Wenn ihr nun BG und AB für den Sinum totum annehmet, so ist BD der Sinus des Winkels BAD oder ABK, hingegen BC der Sinus des Winkels BGC oder GBF (§. 97 *Geom.* & §. 3 *Trigon.*).

Und

Und demnach hat der Sinus des Inclinationswinkels ABK zu dem Sinu des gebrochenen Winkels FBG beständig einerley Verhältniß.

Die 7. Aufgabe.

30. Den Punct f zu finden, wo die Stralen des Lichts, nach geschehener Refraction, in dem Glase KL mit der Axe AF vereiniget werden. Tab. XI. Fig. 95.

Auflösung.

Setzet, der Stral AD sey dem Strale AB unendlich nahe, so ist der Winkel A unendlich klein, und die Linie DI, welche mit der Axe einen rechten Winkel in I macht, steht auch auf AD perpendicular. Eben so macht GH sowohl in G, als H einen rechten Winkel. Es sey nun $AD=AB=AI=y$, $Bc=a$, $BC=b$, $BE=s$, $DF=IF=BF=x$, $HF=EF=GF=v$, $Hf=Ef=Gf=z$, $cP=r$; $CM=t$, die Verhältniß der Refraction aus der Luft in das Glas $3:2$; so ist $Ac=y+a$, $FC=v+b$, $Fc=x-a$. Weil nun $3:2=cP:cQ$ (§.29.), so ist $cQ=2r:3$. Eben so, weil $2:3=CM:CN$ (§.29.), ist $CN=3t:2$. Weil ID mit cP parallel, so ist (§. 184. *Geom.*)

$$Ac:cP=AI:ID$$
$$y+a:r=y:ry:(y+a).$$

Eben so, weil, wegen der rechten Winkel bey D und Q, die Linien ID und cQ parallel sind, ist (§. 184. *Geom.*)

$$FI : ID = Fc : cQ$$

$$x : ry : (y + a) = x - a : \tfrac{2}{3}r$$

$$\tfrac{2}{3}rx = (rxy - ary) : (y + a)$$

$$2rxy + 2arx = 3rxy - 3ary$$

$$3ary = rxy - 2arx$$

$$3ay : (y - 2a) = x.$$

Wiederum, weil, wegen der rechten Winkel bey M und H, die Linien CM und GH parallel sind, so ist (§. 184. *Geom.*)

$$FC : CM = FG : GH$$

$$b + v : t = v : tv : (b + v).$$

Und endlich, weil, wegen der rechten Winkel bey N und H, die Linien CN und GH parallel sind: so ist (§. 184. *Geom.*)

$$fC : CN = fG : GH$$

$$b + z : \tfrac{3}{2}t = z : tv : (b + v)$$

$$\tfrac{3}{2}tz = (btv + tvz) : (b + v)$$

$$3btz + 3tvz = 2btv + 2tvz$$

$$3bz = 2bv - vz$$

$$3bz : (2b - z) = v = x - f$$

$$f + 3bz : (2b - z) = x = 3ay : (y - 2a)$$

$$2bfy - fzy + 2afz - 4abf + 3bzy - 6abz = 6aby - 3azy$$

$$3azy + 3bzy + 2afz - fzy - 6abz = 6aby + 4abf - 2bfy$$

$$z = \frac{6aby + 4abf - 2bfy}{3ay + 3by + 2af - fy - 6ab} = Ef.$$

Wenn ihr die Dicke des Glases nicht regardiret, und also = 0 setzet, so verlieren sich alle Glieder,

wel-

welche durch f multipliciret sind, und ihr bekommet

$Ef = z = 6aby : (3ay + 3by - 6ab) = 2aby : (ay + by - 2ab)$.

Anmerkung.

31. Unerachtet die gefundene Regel hauptsächlich dient, den Ort des Bildes zu finden, wenn das Glas auf beyden Seiten erhaben ist, und zwar die Radii der erhabenen Flächen nicht von einerley Größe sind; so könnet ihr doch daraus gar leicht auch Regeln für alle übrigen Fälle herleiten, wie aus folgenden Zusätzen erhellet.

Der 1. Zusatz.

32. Wenn das Glas auf beyden Seiten gleich erhaben ist, so ist $cB = CE$, das ist, $a = b$, und daher $z = 2a^2y : (2ay - 2a^2) = ay : (y - a)$.

Der 2. Zusatz.

33. Wenn cB oder a unendlich groß wird, so ist die Seite KBL, welche gegen den stralenden Punct A gekehrt ist, platt, und die Glieder, welche durch a nicht multipliciret sind, werden, in Ansehung der andern, unendlich klein, oder nichts. Daher ist $z = 2aby : (ay - 2ab) = 2by : (y - 2b)$.

Der 3. Zusatz.

34. Hingegen, wenn b unendlich groß wird, so ist das Glas auf der hintern Seite KEL platt, und die Glieder, worinnen b nicht vorhanden ist, werden, in Ansehung der andern, unendlich klein. Solchergestalt ist $z = 2aby : (by - 2ab) = 2ay : (y - 2a)$.

Der 4 Zusatz.

35. Also ist es gleich viel, ob ihr die erhabene oder platte Fläche eines Glases, welche auf einer

Seite erhaben, auf der andern platt ist, gegen den stralenden Punct kehret.

Der 5. Zusatz.

36. Wenn sowohl a als b unendlich groß werden, so wird das Glas auf beyden Seiten platt, und $ay + by$ werden, in Ansehung $2ab$, unendlich klein. Daher ist $z = 2aby : -2ab = -y$. Also kommen die Stralen nirgends zusammen, als in dem Puncte, wo sie ausfliessen.

Der 6. Zusatz.

37. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Stralen mit der Axe parallel ein, und daher ist $2ab$, in Ansehung der übrigen Glieder, unendlich klein, folglich $z = 2aby : (ay + by) = 2ab : (a + b)$ für ein Glas, welches auf beyden Seiten auf verschiedene Art erhaben ist.

Der 7. Zusatz.

38. Wenn das Glas beyderseits auf gleiche Art erhaben ist, so ist $z = 2aa : 2a = a$.

Der 8. Zusatz.

39. Wenn a unendlich groß wird, so ist die Seite KBL gegen den stralenden Punct zu, platt, und b, in Ansehung a, unendlich klein. Derowegen ist $z = 2ab : a = 2b$. Hingegen, wenn b unendlich groß wird, so ist die von dem stralenden Puncte A weggekehrte Seite KEL platt, und a, in Ansehung b, unendlich klein. Derowegen ist $z = 2ab : b = 2a$.

Der 9. Zusatz.

40. Wenn ihr für $+b$ in der Regel $-b$ sezet, so wird das Glas auf der Seite KBL, ge-

gen den stralenden Punct A zu, hohl, und $z = -2aby : (ay - by + ab)$.

Der 10. Zusatz.

41. Setzet $-a$ für $+a$, so wird das Glas auf der von dem stralenden Puncte weggekehrten Seite hohl, und $z = -2aby : (by + 2ab - ay)$.

Der 11. Zusatz.

42. Wenn ihr für a und b zugleich $-a$ und $-b$ setzet, so wird das Glas auf beyden Seiten hohl, und $z = 2aby : (-ay - by - 2ab)$.

Der 12. Zusatz.

43. Wenn a unendlich groß wird, und ihr $-b$ für b setzet, so ist das Glas auf der Seite gegen den stralenden Punct platt, auf der andern aber hohl, und die Größen, welche durch a nicht multipliciret sind, werden, in Ansehung der andern, unendlich klein. Daher ist $z = -2by : (y + 2b)$.

Der 13. Zusatz.

44. Wenn b unendlich groß wird, und ihr $-a$ für a setzet, so ist das Glas auf der Seite gegen den stralenden Punct hohl, auf der andern aber erhaben, und die Größen, welche durch b nicht multipliciret sind, werden, in Ansehung der andern, unendlich klein. Daher ist $z = -2ay : (y + 2a)$.

Der 14. Zusatz.

45. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Stralen parallel ein, und daher wird (§. 40.) $z = -2aby : (ay - by) = -2ab : (a - b)$ (§. 41.), $z = -2aby : (-ay + by) = -2ab : (b - a) =$

 (wenn

(wenn $a = b$) $- 2a^2$ (§. 42), $z = 2aby : (-ay-by) = 2ab : (-a-b) =$ (wenn $a = b$) $= a$ (§. 43.), $z = -2by : y = -2b$ (§. 44.), $z = -2ay : y = -2a$.

Der 15. Zusatz.

46. Weil in den Hohlgläsern die Weite des Punctes, wo die gebrochenen Stralen mit der Axe vereiniget werden, das Zeichen — hat, so ist klar, daß derselbe auf der Seite, gegen den stralenden Punct zu, gesucht werden muß, und dannenhero die Stralen in dergleichen Gläsern von der Axe weggebrochen werden. Ob aber solches viel oder wenig geschehe, kann aus den gefundenen Regeln geurtheilet werden.

Anmerkung.

47. Aus diesen Exempeln könnet ihr sehen, wie die Algebra mit großem Vortheile in andern Wissenschaften angebracht wird, und werde ich bey anderer Gelegenheit noch ein mehreres zeigen.

ENDE der Algebra.

Re=

Register.

A.

Pag.

Abscisse 118
Achteck wie seine Seite zu finden . . . 94
Addiren Regeln davon für Buchstaben . 13. seq.
für Irrationalzahlen . . 24
Zeichen 11
Aequatio quadratica affecta, unreine quadratische Gleichung 40
Algebra 7
Algebraische Aufgaben aufzulösen . . 26. seq.
in dem menschlichen Leben . . . 34
in der gemeinen Geometrie . . 92
in der höhern . . . 117. seq.
Algebraische Gleichung, Nutzen in Erklärung der krummen Linien . . . 117, 119
Algebraische Linie Erklärung . . . 118
Geschlechte 119
allgemeine Gleichung, oder Generalgleichung 121
Subtangens . . . . 231. seq.
Alternatio rationum Versetzung der Glieder einer geometrischeu Proportion . . 80. seq.
Apollonische Parabel 123
Applicate oder Semiordinate . . . 242
die größte oder kleinste in der algebraischen Linie zu finden . . 242
in dem Circul . . . 243. seq.
in der Ellipsi 244
Arithmetica infinitorum 89

Arith-

Pag.
Arithmetica universalis Allrechenkunst . . 8
Arithmetische Progreßion 61
Eigenschaften . . . 61. seq.
Asymptoten Erklärung 140
wie sie zu finden seyn . . 234. seq.
Aufgabe wie sie algebraisch aufzulösen . 26. seq.
Axe der krummen Linie vid. Diameter . —

B.

Benennung 26
Bewegung Regeln insgemein . . 313. seq.
ins besondere für die schweren Körper 315. seq.
ihre Größe 313
Binomische Wurzel Erklärung . . . 38
ihre Natur zu finden . 38. seq. 44. seq.
was sie enthalte in der dritten Dignität 44
Regeln davon . . . 46. seqq.
Biquadratische Gleichung wie sie geometrisch
zu construiren 209. seq.
Bogen wie daraus der Sinus zu finden 278. seqq.
wie der Tangens zu finden . 277. seq.
Brennpunct (Focus) Erklärung . . . 125
wie er in der Parabel zu finden sey . 125
wie er zu finden sey in der Hyperbel 136. seq.
Ellipsi . 130
Brüche unendliche zu summiren . . . . 87. seq.
wie sie aus Gleichungen wegzuschaffen 168. seqq.
Buchstabenrechenkunst 8

C.

Centralregel des Backer 136
Circul Eigenschaft 113, 243
Quadratur . . . . 263. seq.
Rectification 276
Subtangens . . . . 228. seq.
Circul von höhern Geschlechtern . . 135, 229
Cissois Erklärung 149
Eigenschaft und Gleichung . . 149
Compositio rationum vid. Verhältniß ihre Verän-
derungen 80
Conchois seu Conchilis Muschellinie, Erklärung . 147

Pag.
Conchois seu Conchilis Gleichung . . . 148
Asymptote 150
Subtangens . . . . 238. seq.
Wendungspunct . . . 306. seq.
Conus Kegel Eigenschaften . . . 115.seq. 250
Ausrechnung 283
Conversio rationum, vid. Verhältniß, ihre Veränderungen . . . 80. seq.
Cubatur 282
Cubikwurzel, wie sie auszuziehen . . . 44
Cubikzahlen ihre Differentien . . . 57
Cubiren 282
Cubische Gleichung, wie daraus die Wurzel zu ziehen . . . 166
wie sie geometrisch zu construiren . 195
Cyclois Radlinie, Erklärung 151
Eigenschaften . . . . ibid.
Subtangens . . . . 239. seq.
Cylinder seine Höhe zu finden . . . 114
Diameter zu finden . . 115. seq.

D.

Diameter oder Axe einer krummen Linie . 118
Differential Erklärung 254
wie sie zu integriren . . 252. seq. 298
Differentialrechnung 219
Differentialgröße Erklärung . . . 221
wie sie zu differentiiren . . . 222
Differentiiren Erklärung . . . 221
Regeln für die veränderlichen Größen 222. seq.
für die Exponentialgrößen . 296
für die Integralgrößen . 300. seq.
Differentio-Differentiiren 300
Dignität Erklärung 19
Eigenschaften . . . 60. seq. 135
allgemeine Regel für dieselben . . 46
Dividiren mit Buchstaben Regeln davon . 18 seq.
Regeln für Irrationalzahlen . . 26
Zeichen 12
Divisio rationum . . . . . . 80. seq.
Dreyeck seine Höhe zu finden . . . 100. seqq.
Seite zu finden 92. seq. 103. seqq. 111, 216. seq.

Pag.
Dreyeck Inhalt zu finden . . . 103, 255.
zu zeichnen 99

E.

Ebener Ort Locus planus . . . 183
Einfacher Ort Locus simplex 183
Element der Fläche 254
Ellipsis Erklärung 128
Eigenschaften . . 129, 134, 244, 246. seq.
Gleichung . , . . . 129
Beschreibung 134
Quadratur 265
Subtangens . . . 229. seq.
wie sie aus dem Kegel geschnitten wird 146
Ellipses von höhern Geschlechtern . 135, 229
Elliptische Afterkugel 285
Erhabener Spiegel seine Eigenschaften . . 328
Evolute 308
Exponenten der Dignitäten . . . 19
Exponentialgrößen Erklärung . . . 296
wie sie zu differentiiren . . 296. seq.
wie sie zu integriren . . 298. seq.
Exponentiallinien 297
Exponentialrechnung 296

F.

Falsche Wurzel 152
Familie der algebraischen Linien . . 120
Fläche der Körper, wie sie zu finden sey . 269. seq.
Focus vid. Brennpunct . . . . ——
Fünfeck seine Seite zu finden . . . 97
wie es geometrisch zu beschreiben . ibid.

G.

Generalgleichung oder allgemeine Gleichung 121
Geometrische Linien 119
Oerter Locus geometricus . 183
Geometrische Verhältniß Eigenschaften . 82
Gerade Zahlen ihre Eigenschaften . 58. seqq.
Geschlecht der algebraischen Linien . . 119
Geschliffene Gläser ihre Eigenschaften . . 325

Pag.
Geschwindigkeit 312
Gleichseitige Hyperbel Erklärung . . . 144
 Nutzen 294
Gleichung 26
Größe Erklärung . . . . . 8. seq.
 wie sie zu finden . . . 27. seqq.
 Veränderungen 9
 Zeichen 10
Größe der Bewegung 313
Größtes 242

H.

Harmonische Proportion 89
 Progreßion 90
 ihre Glieder zu finden . . 90. seqq.
Hexagonalzahl 71
Höhe des Triangels, wie sie zu finden . 100. seq.
Hohles Glas Eigenschaften . . . . 328. seq.
Hohlspiegel Eigenschaften 320
Hyperbel Erklärung 135
 Beschreibung . . 139. seq. 144.
 Asymptoten 140
 Eigenschaften zwischen den Asymptoten 141. seq.
 Quadratur . . . 261. seq.
 Subtangens . . . . . 230. seq.
 wie sie aus dem Kegel geschnitten wird 147
Hyperbeln von höhern Geschlechtern . . 144
Hyperbolischer Afterkegel wie er zu cubiren . 286

J.

Integralrechnung Erklärung . . . 252
 Regeln . . . . 252. seq.
Integriren oder Summiren . . . 252
Inversio rationum vid. Verhältniß ihre Veränderungen . 80. seq.
Irrationalzahlen unter eine Benennung zu bringen . 22. seqq.
Irrationalgrößen Erklärung . . . 22
 ihre Rechnung . . . . 22. seq.
 wie sie aus der Gleichung abzuschaffen . . 161 seq.

Pag.

K.

Kegel vid. Conus . . . . . —
Kegelschnitte Sectiones conicæ . . . 121
Kleine Axe in der Ellipsi 130
in der Hyperbel 136
Kleinstes 242
Körperlicher Ort Locus solidus . . . 183
Krumme Linie des Cartesii zu quadriren 259. seq.
Kugel Eigenschaften 115
Ausrechnung . . . . 283. seq.
ihren Diameter zu finden . . 116

L.

Locus simplex ein einfacher Ort . . . 183
planus, ebener Ort . . . . ibid.
solidus körperlicher Ort . . . ibid.
Logarithmische Größen wie sie zu differentiiren 292
zu integriren . 293
Logarithmische Linie Erklärung . . 150
Eigenschaften . . . 291. seq.
Quadratur 267
Subtangens 240
Nutzen 292
Körper, welcher daraus erzeugt wird 286. seq.
Logarithmische Spirallinie . . . 151
Logarithmus Ausrechnung 293
wie daraus die Zahl zu finden sey . 293
Differentialgröße davon . . 292

M.

Materie 312
Mechanische Linien 119
Media & extrema ratione secare lineam . 98. seq.
Mehr 11
Mehrzeichen 108
Methode von größten und kleinsten Methodus de maximis & minimis . 242
umgekehrte der Tangenten Methodus tangentium inversa . 288
Minderzeichen 108
Mittelpunct der Hyperbel 136

Mul-

Pag.
Multiplication in Buchstaben, Regeln davon 17. seq.
für Irrationalzahlen . . . 25
Zeichen 11
Muschellinie Conchois seu Conchilis . . 147

N.

Normallinie 227
Numerus polygonus Polygonalzahl . . . 71

O.

Ordinate 118
ihre Verhältniß in der Parabel . 125
in der Ellipsi . 131. seq.
Ort an dem Circul Erklärung . . . 183
wie er zu construiren sey . 191
an der *Ellipsi* Erklärung . . . 183
wie er zu construiren sey 188. seqq.
an einer geraden Linie Erklärung . 183
wie er zu construiren sey 183. seq.
an der Hyperbel Erklärung . . . 183
wie er zu construiren sey 191. seqq.
zwischen den Asymptoten Erklärung . 193
an einer Parabel Erklärung . . . 183
wie er zu construiren sey 185. seqq.
Ort des Bildes im Spiegel . . 319. seq.

P.

Parabel Parabola Erklärung . . . 122
Eigenschaft . . . 122, 126. seqq.
Beschreibung . . . 122, 185, 289,
Quadratur 256
Rectification . . . . 273. seq.
Subtangens . . . . . 227. seq.
wie sie aus dem Kegel geschnitten wird 145
Parabeln vom höhern Geschlechte Erklärung 119 seq.
Beschreibung . . . 223. seq.
Eigenschaften 128
Subtangens . . . . 227. seq.
Quadratur . . . 256. seq.

Pag.
Parabeln vom höhern Geschlechte Rectification 275. seqq.
Parabolischer Afterkegel . . . 271. seq.
Ausrechnung . . . . 284. seqq.
Parallelepipedum Eigenschaften . . 249. seq.
Parameter 122, 128, 135
Pentagonalzahl 71
Platter Spiegel Eigenschaften . . . 322
Polygonalzahl Numerus polygonus Erklärung 71
wie sie zu finden . . 73. seqq.
Polynomische Wurzel 38
Potenz Erklärung 19
Grade . . . . . . ibid.
Zeichnung . . . . . ibid.
Rechnung 20
Potenz der Hyperbel 140
ihre Größe zu finden . . 140. seq.
Progressio arithmetica, arithmetische Progreßion 60
Eigenschaften . 61. seqq.
geometrica geometrische Progreßion . 61
Eigenschaften . 77. seqq.
Proportio continua . . . . . ibid.
Proportion Eigenschaften . . . . ibid.
Proportionallinien, wie sie zu finden . 199. seqq.
Punctum regressus vid. Wiederkehrungspunct . ——
flexus contrarii vid. Wendungspunct ——

Q.

Quadratische Gleichung æquatio quadratica
Erklärung 40
wie eine unreine, æquatio quadratica affecta, aufzulösen 40
Exempeln . . . . 42. seqq.
Quadratrix des *Dinostratis* 150
Quadratur des Circuls . . . 263. seq.
der krummen Linien . . 254
Quadratwurzel, wie sie gefunden wird . 39
Quadratzahl Erklärung 71
wie sie entstehet . . 38. seqq.
Eigenschaften . . 174. seq.

Qua-

Pag.
Quadratzahl ihre Differentien . . . 56
Quadrinomische Wurzel 38

R.

Radlinie Cyclois 151
Radius der Evolute Erklärung . . . 308
seine Länge zu finden 309. seq.
Rechtwinklichter Triangel Eigenschaften 103. seqq. 208. seq.
208. seq.
seine Seiten zu finden 99. seq. 103. seq. 105. seq.
111, 216. seq.
seinen Inhalt zu finden 99
Rectification der krummen Linien . . 272
Reflection Gesetze davon . . . 317. seq.
Refraction Gesetze . . . . 323. seq.
Reguläres Dreyeck wie seine Seite sich zu dem Diameter des umschriebenen Circuls verhalte . 93
Reguläres Vieleck ob Renaldinus es richtig zu beschreiben angewiesen habe . 112. seq.

S.

Scheitel 118
Schranken der Wurzeln in Gleichungen zu finden . 165. seq.
Secans des vielfältigen Winkels wie er zu finden . . 110
Sectio Divina 175
Sectiones conicæ vid. Kegelschnitte . . . —
Sehne in der Parabel ihre Verhältniß 126. seq.
Seite der Polygonalzahl Erklärung . . 72
wie sie zu finden sey 74. seqq.
Semiordinate 118
Sinus Gebrauch . . . . . . 178. seqq.
Berechnung des von 18. und 36. Graden . 98
des von 22. Graden 30. Minuten 94
des von 60. Graden . . 93
eines vielfachen Bogens zu finden . 106. seqq.
wie aus ihnen die Bögen zu finden . 278. seq.
Sinus versus wie daraus der Bogen zu finden . 281

Pag.

Spiegel Eigenschaften 318
Spirallinie Erklärung 152
Subtangens 236
Quadratur 267
Spirallinie von unendlichen Geschlechtern
Erklärung 152
Subtangens 237
Quadratur . . . . 268. seq.
Subnormallinie Erklärung 227
wie sie zu finden sey . 232, 297
Subtangens Erklärung . . . . 226. seq.
wie sie zu finden . . 227. seq. 236, 297
Subtrahiren Regeln für die Buchstaben . 15. seq.
für Irrationalzahlen 23. seq.
Zeichen 11
Summiren vid. Integriren . . . . —

T.

Tangens wie daraus der Bogen zu finden . 276. seq.
Tangens des vielfachen Winkels wie er zu finden 110
der krummen Linie Erklärung . 226
wie er zu finden
227. seqq. 277. seq.
Transscendentische Linie 119
Triangel Eigenschaften vid. Dreyeck . . 109
Ausrechnung . . . 103, 255
Triangularzahl 71
Trinomische Wurzel 38

V.

Veränderliche Größe Erklärung . . . 221
Zeichen . . . 222
Verhältniß ihre Veränderung Conversio vel Inversio rationum . . 80. seq.
Verhältniß der Irrationalgrößen . . 23

U.

Undeterminirte Aufgabe 172

	Pag.
Undeterminirte Aufgabe Exempel dazu .	172. seqq.
Unendliche kleine Größe . . .	219. seq.
Ungerade Zahlen, ihre Eigenschaften .	57. seqq.
Unveränderliche Größe Erklärung . .	221
Zeichen	222

W.

Wahre Wurzel	152
Wendungspunct Punctum flexus contrarii Erklärung . .	301
wie er zu finden . .	303. seqq.
Weniger	11
Wiederkehrungspunct Punctum regressus Erklärung .	301
wie er zu finden sey	303. seqq.
Wurzel ihre Arten	43, 152.
Rechnung mit Buchstaben . .	10, 20
wie sie aus jeder Dignität zu ziehen sey	52. seqq.
Wurzel der Gleichung Erklärung . .	152
Eigenschaften .	153. seq.
Veränderung .	155. seqq.
Schranken .	165. seq.
Ausziehung 162. seqq.	166. seqq.
wie sie durch Näherung zu finden sey .	168. seqq.
Wurzelzeichen	21

Z.

Zahl der Winkel in der Polygonalzahl .	72
Zeheneck wie seine Seite zu finden . .	96
Zwerchaxe Axis transversus . . .	135
Zwey mittlere Proportionallinien wie sie zu finden seyn .	199. seqq.

Ende des Registers.

Bericht
an den Buchbinder.

Die Kupfer müssen hinten nach pag. 330. gebunden werden.

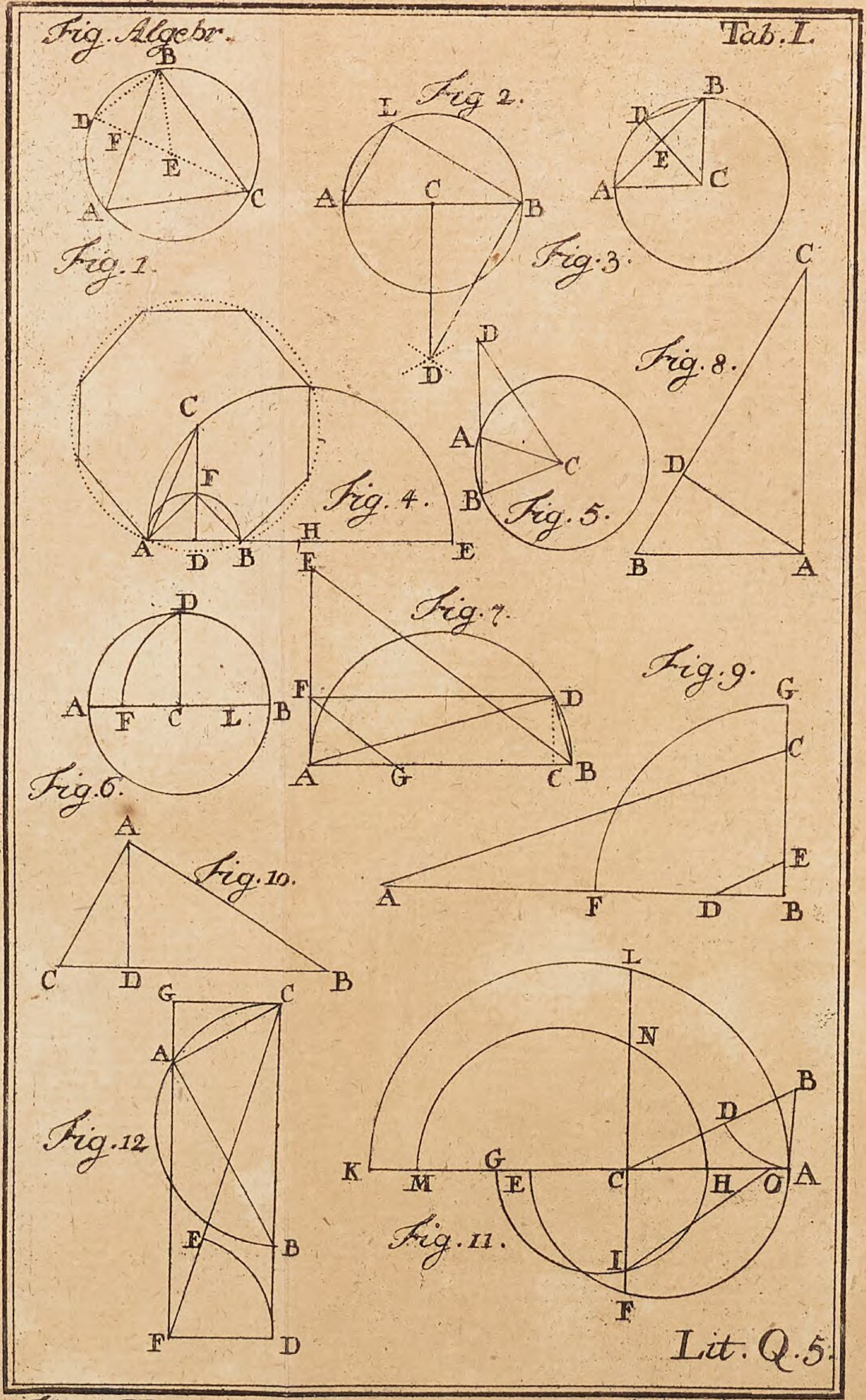
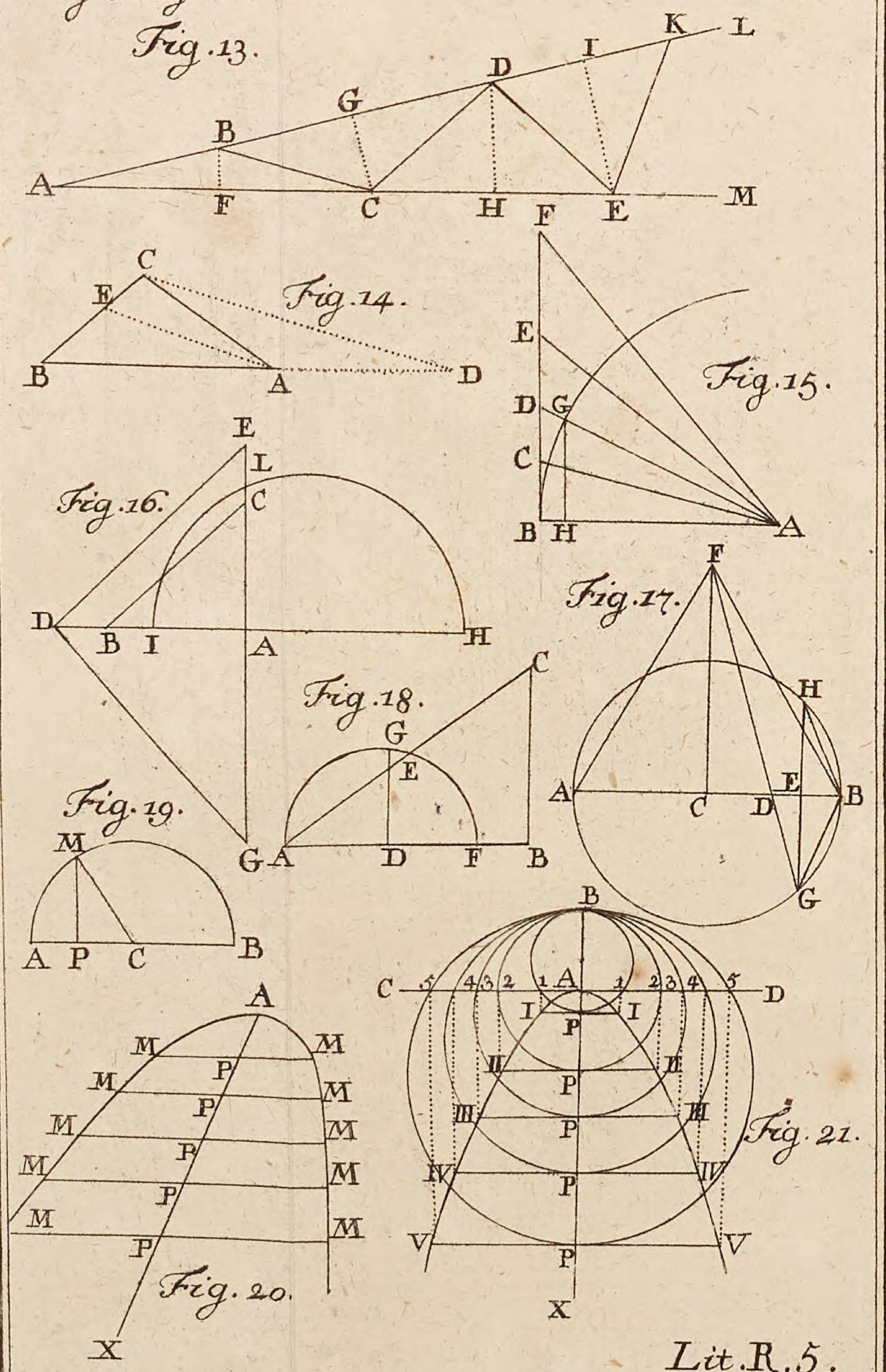


Fig. Algebr.
Tab. I.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Lit. Q. 5.

Fig. Algebr. *Tab. II.*



Lit. R. 5.

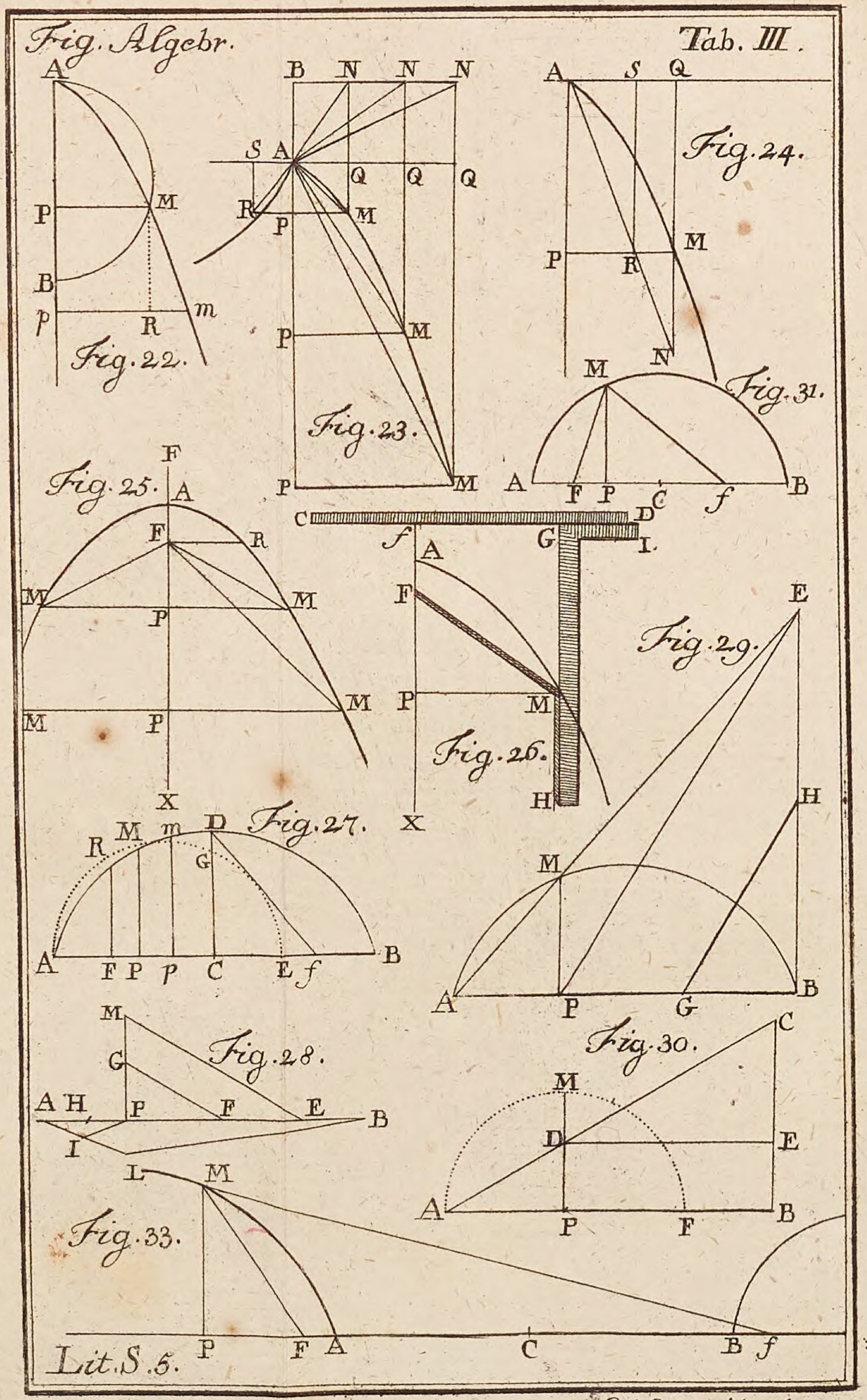
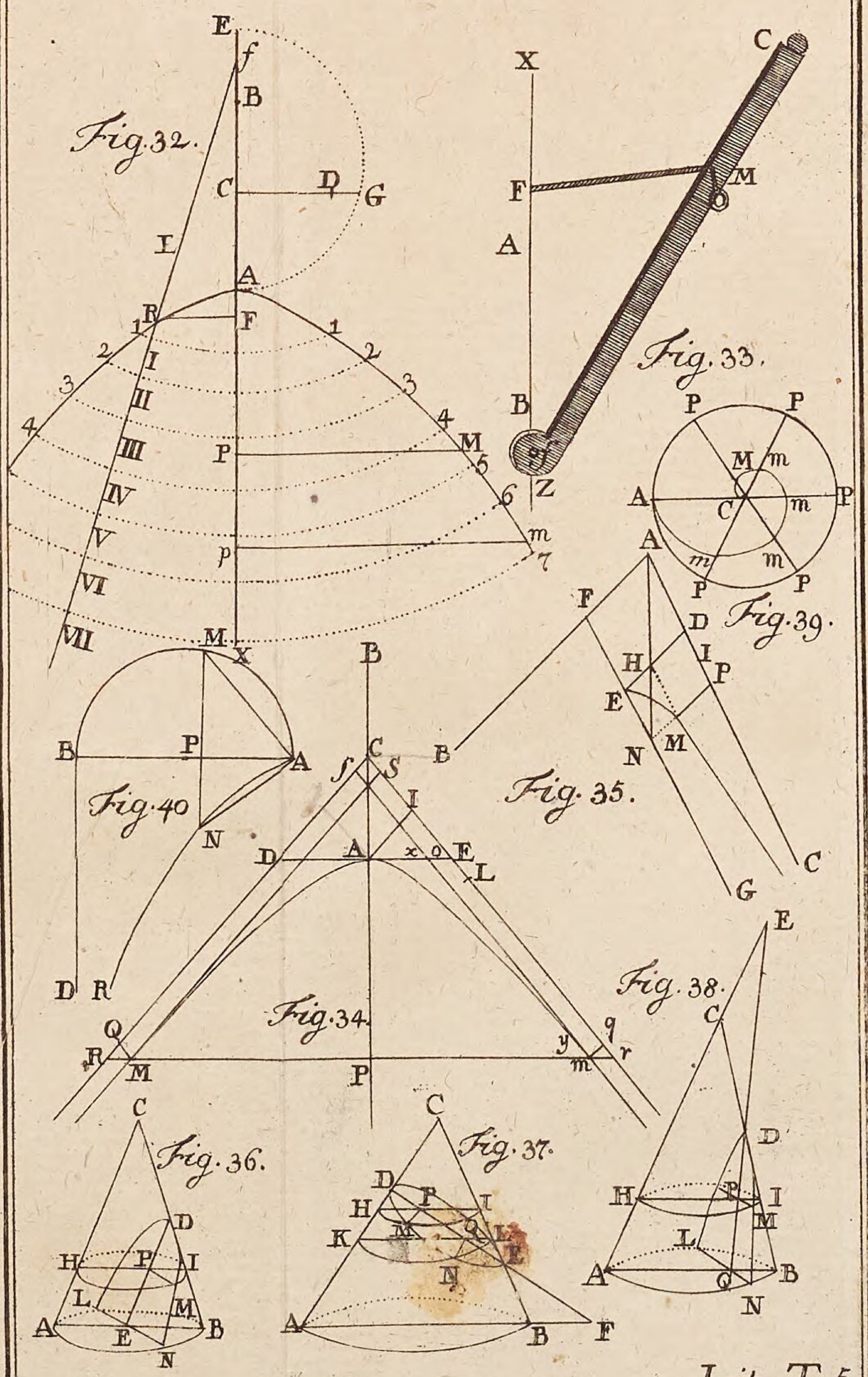


Fig. Algebr.
Tab. III.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 33.
Lit. S. 5.



Lit. T. 5.

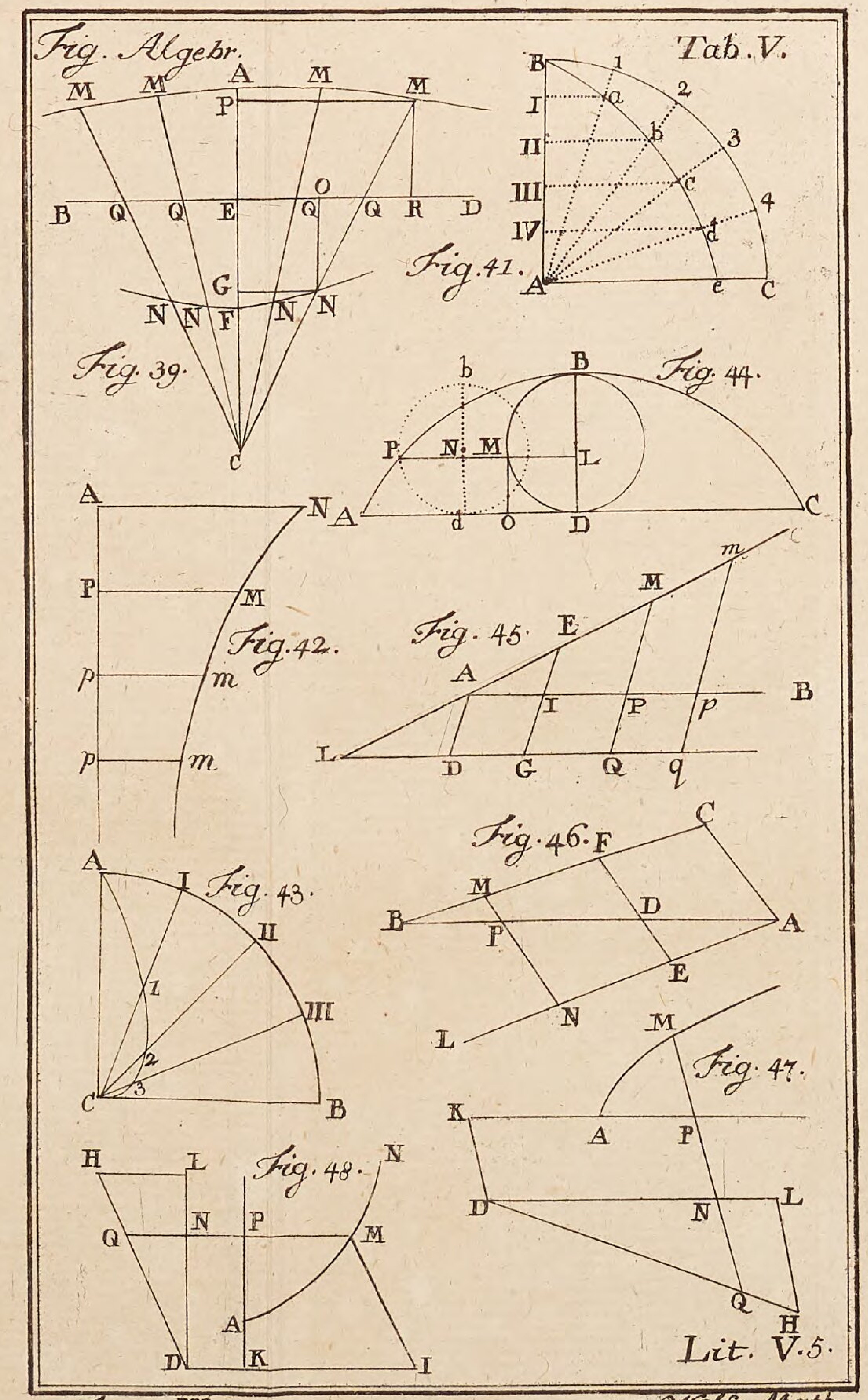


Fig. Algebr.
Tab. V.
Fig. 39.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Lit. V.5.

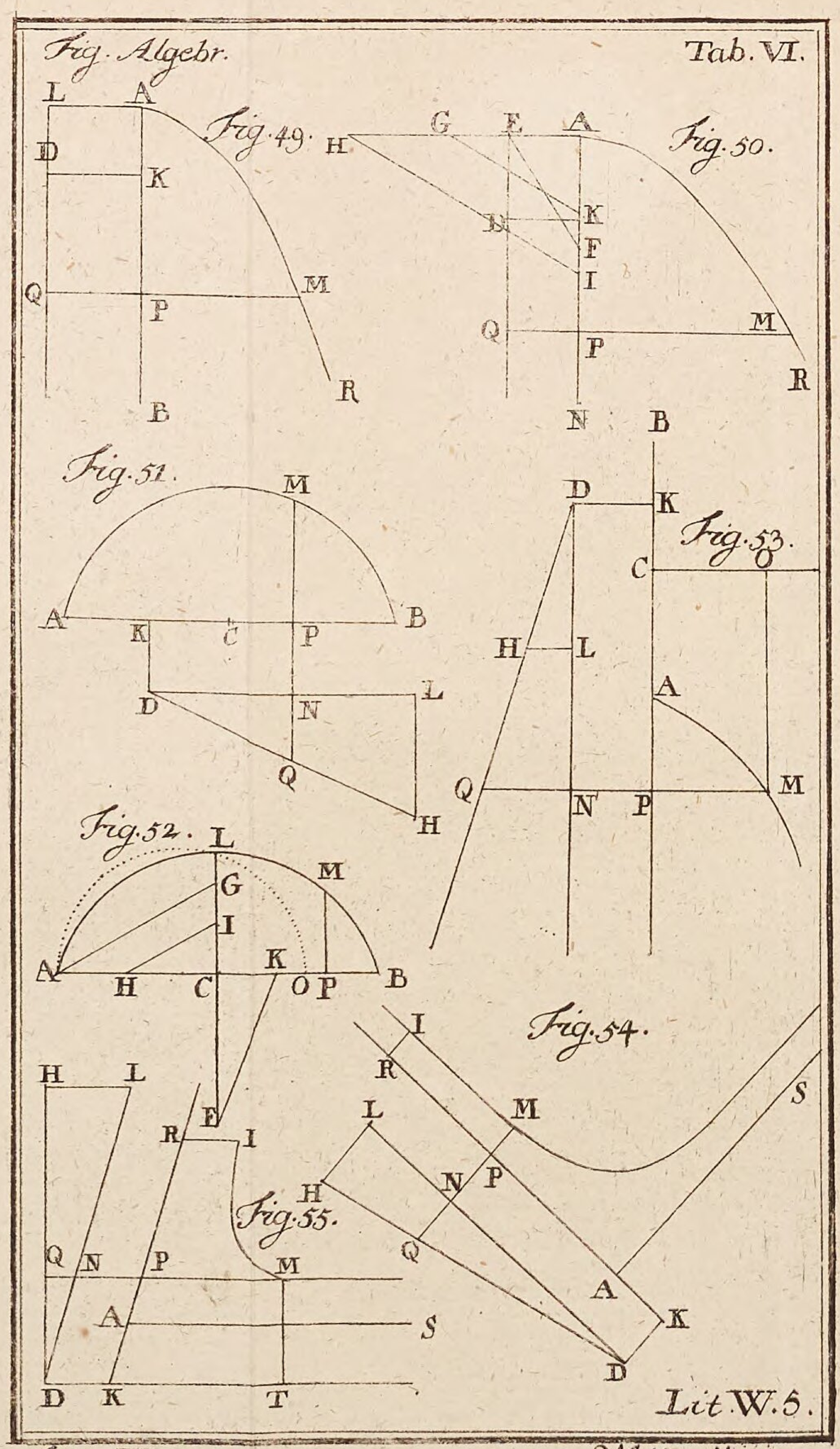


Fig. Algebr.
Tab. VI.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Lit W. 5.

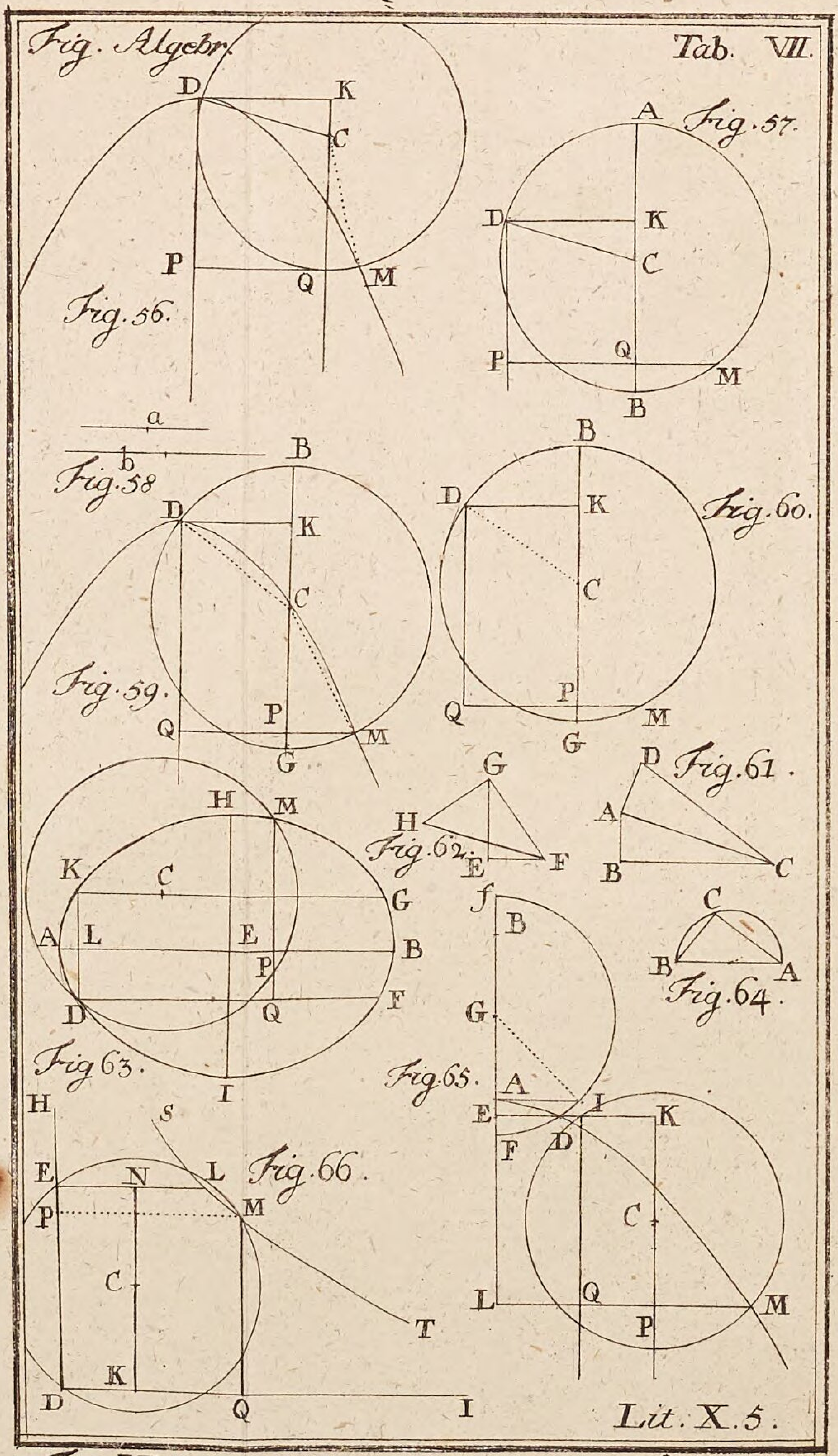
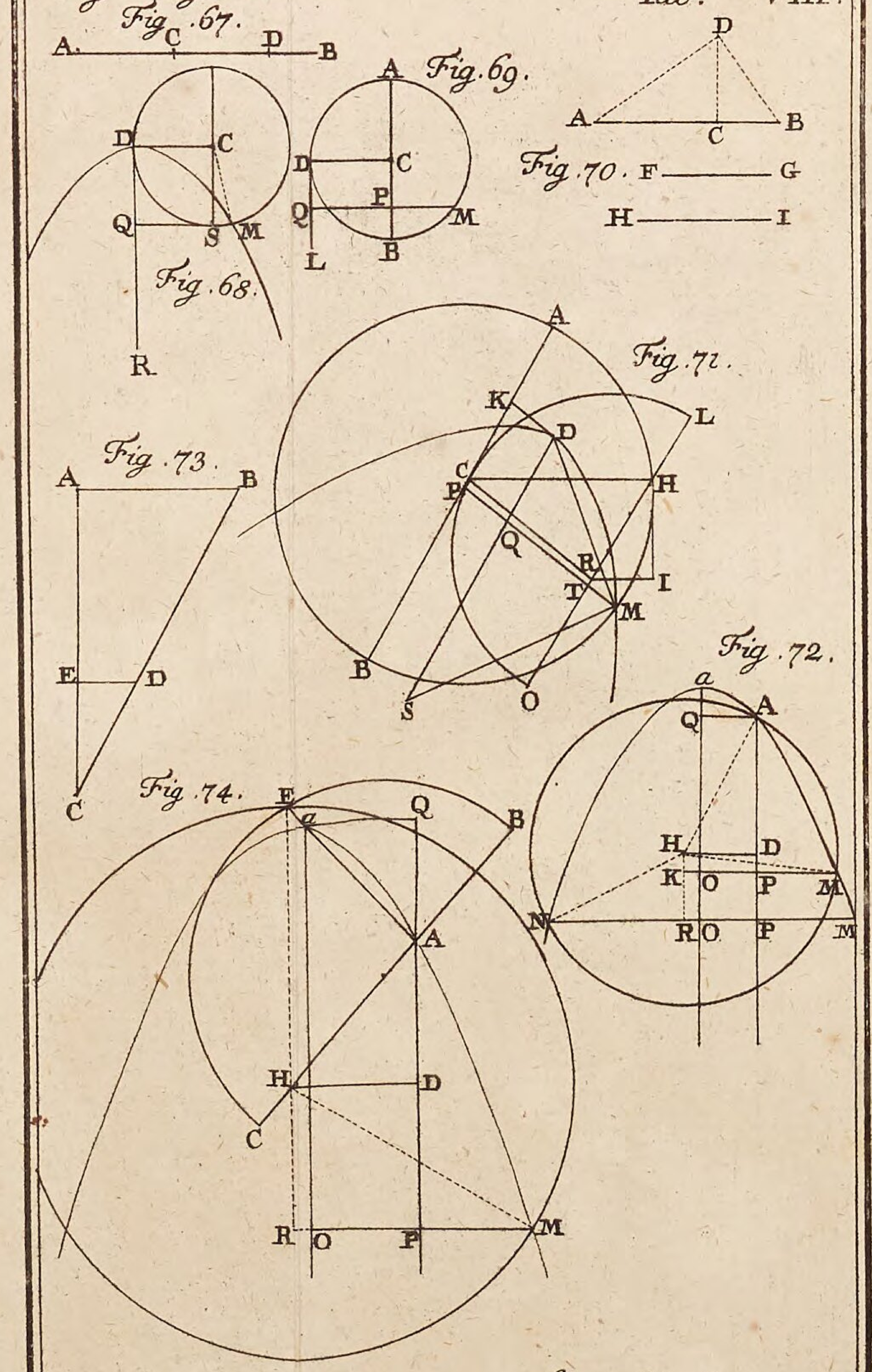


Fig. Algebr.
Tab. VII.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Lit. X. 5.

Fig. Algebr. Tab. VIII.



Lit. Y. 5.

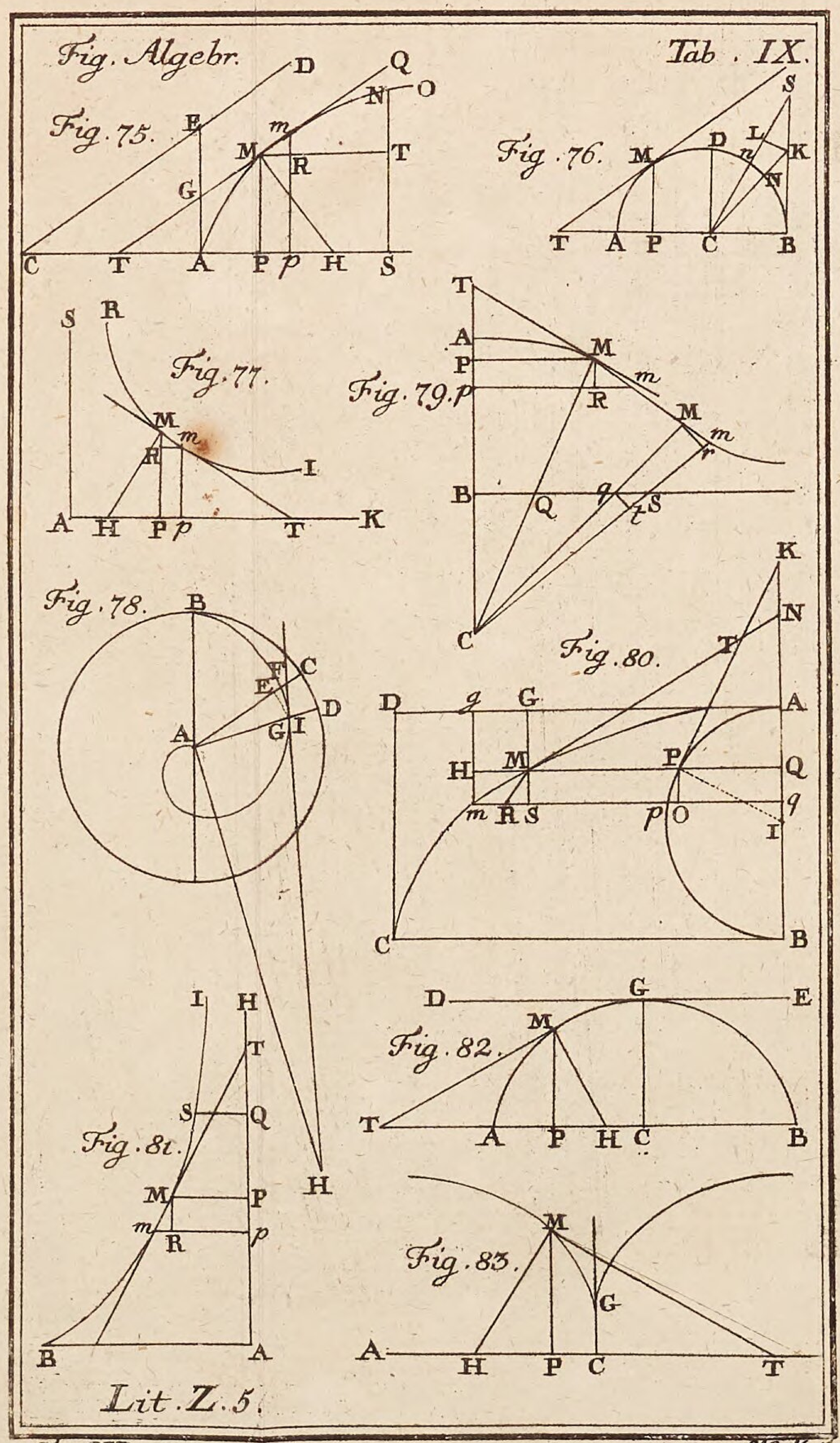


Fig. Algebr.
Tab. IX.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Lit. Z. 5.

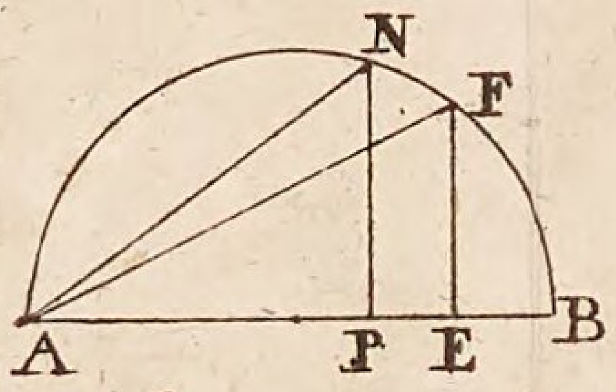


Fig. 84.

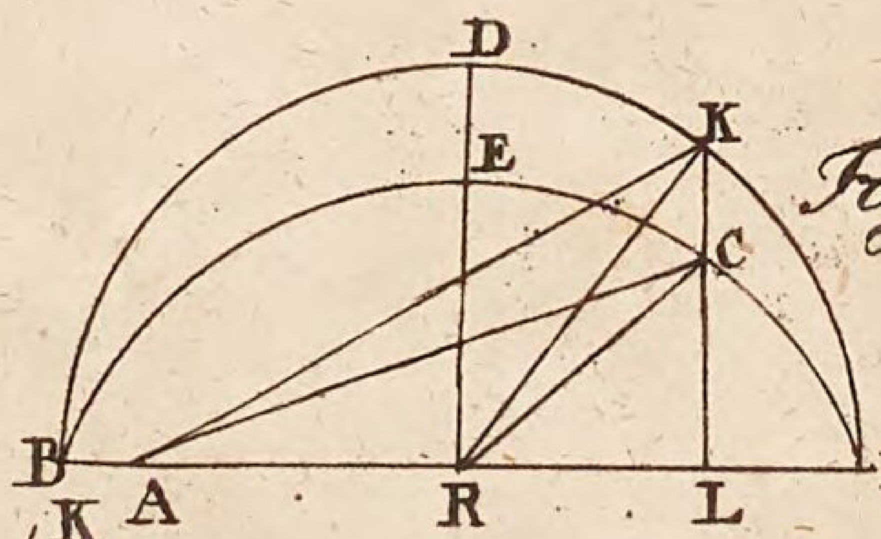


Fig. 85.

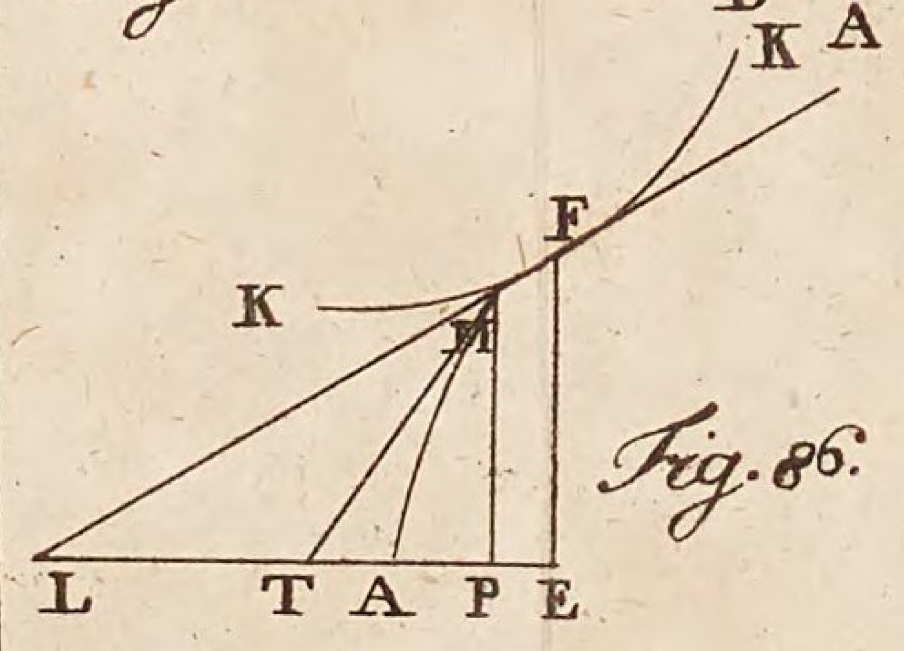


Fig. 86.

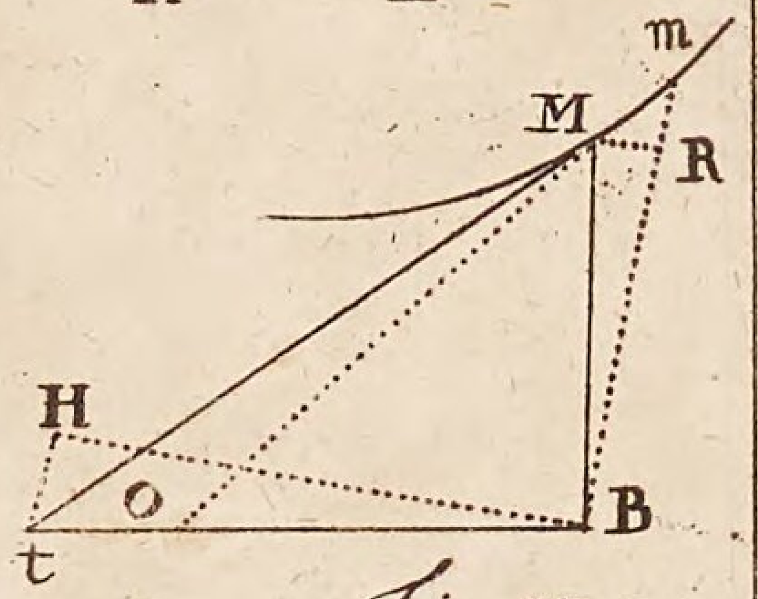


Fig. 87.

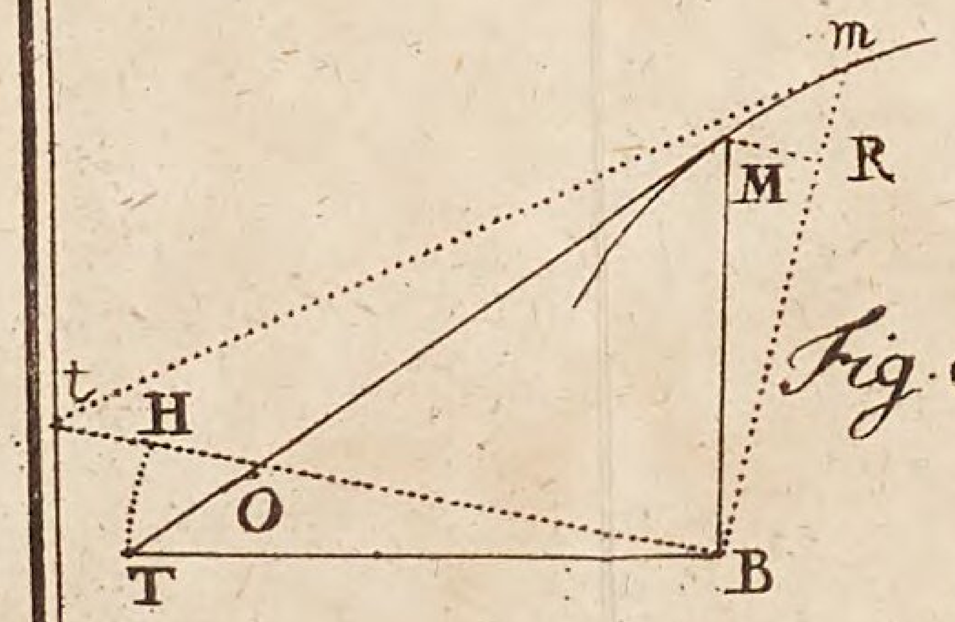


Fig. 88.

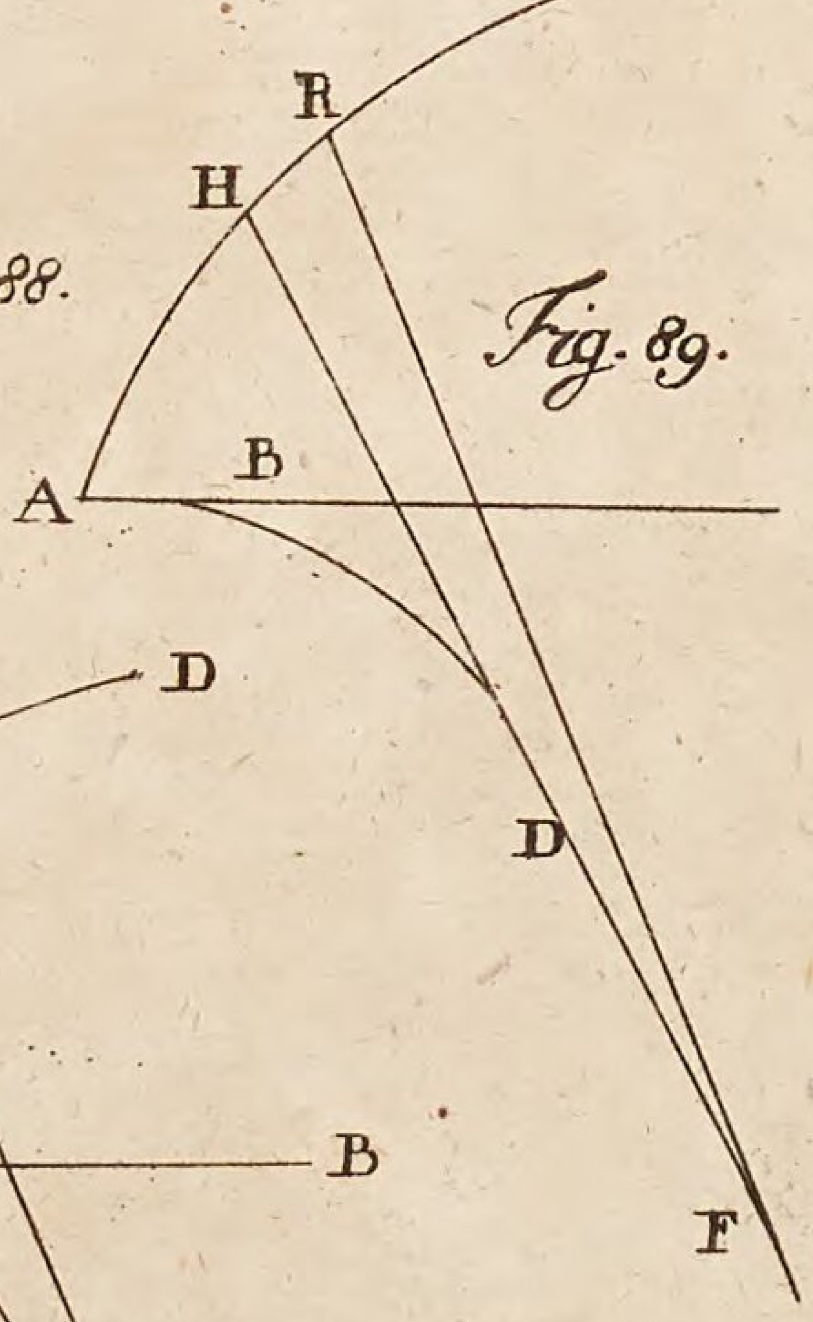
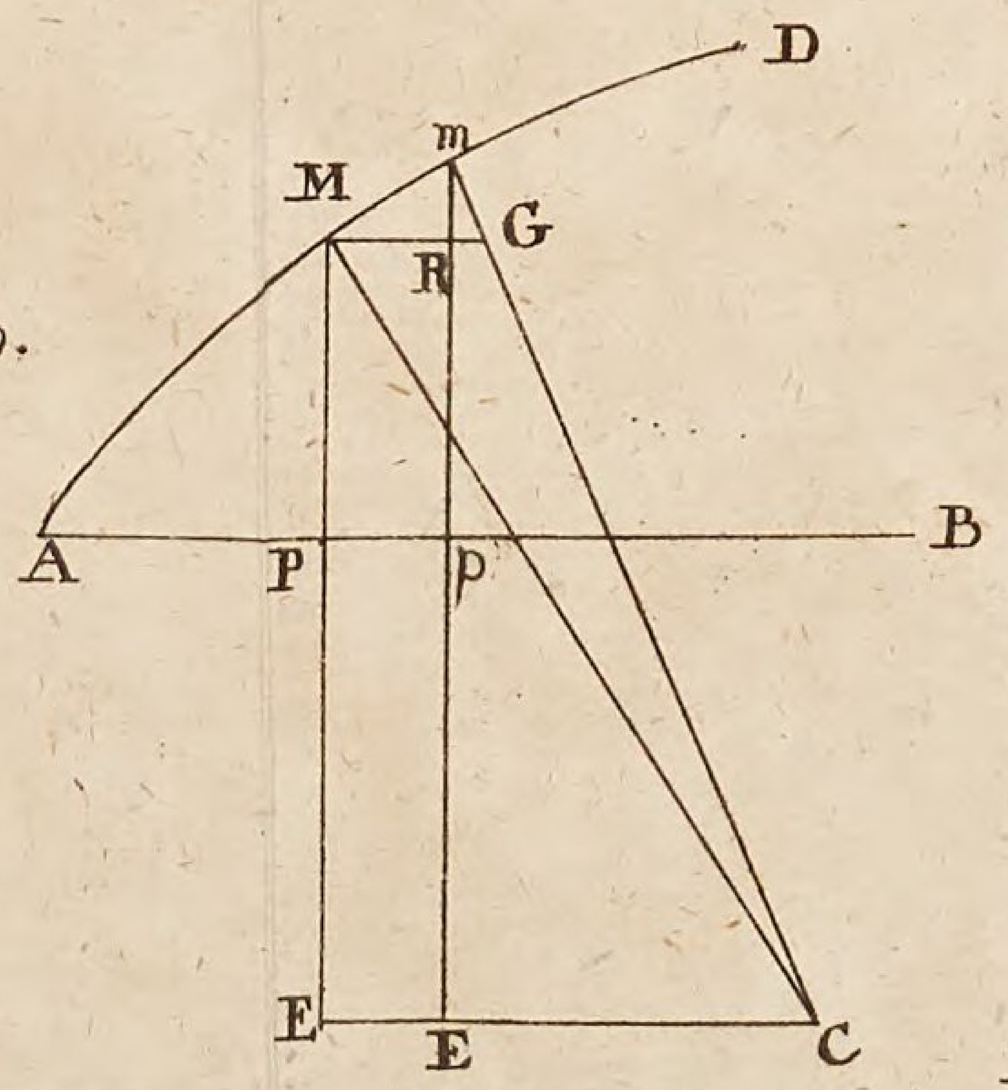


Fig. 89.

Fig. 90.



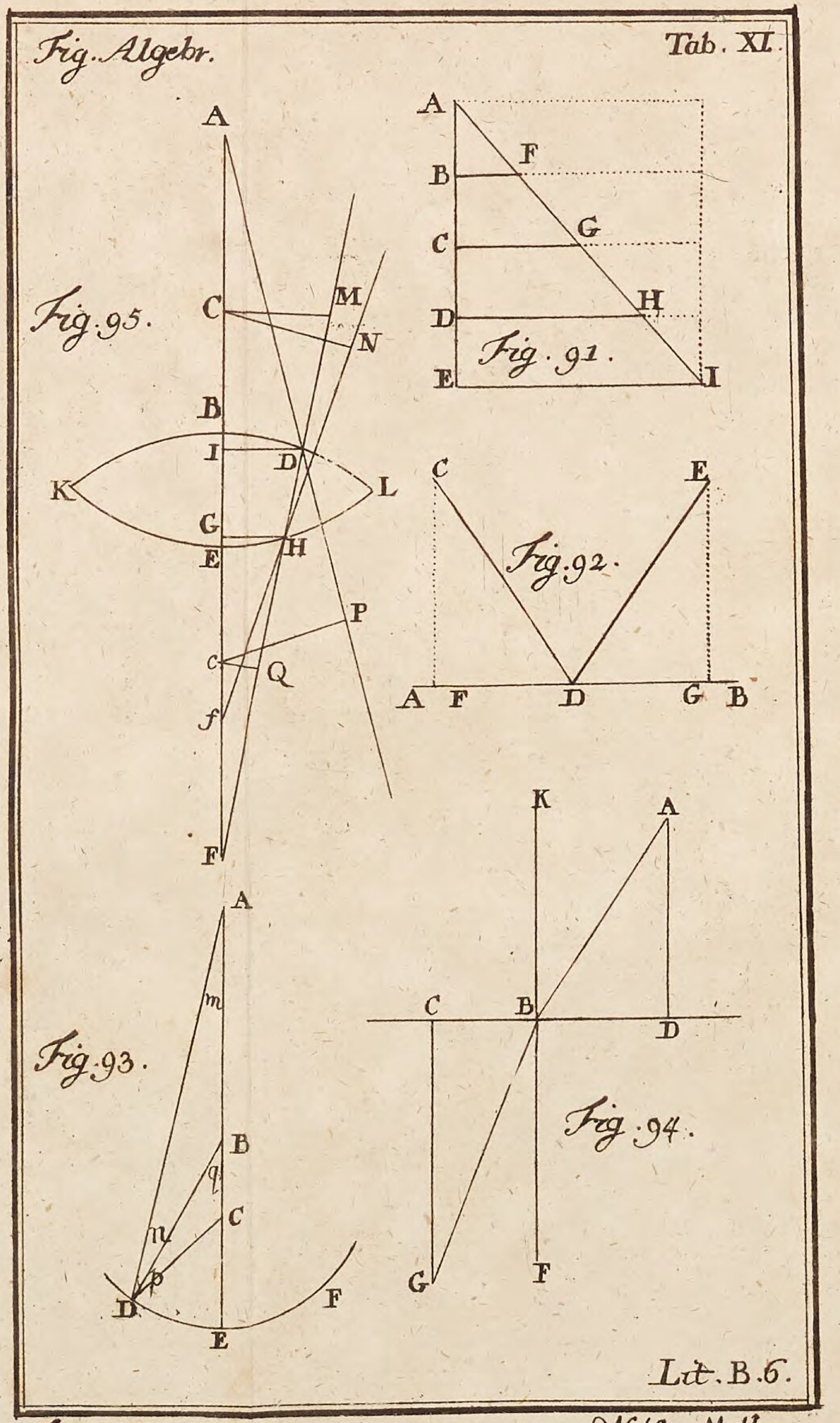


Fig. Algebr.
Tab. XI.
Fig. 95.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Lit. B. 6.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wolff, Christian <<von>>,

Die Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften

Bd.: 6. Welcher sowohl die gemeine Algebra, als die Differential- und Integ
ralrechnung ... in sich begrei

Wien 1763

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.65(5#1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739796-7
VD18 12058475-001